



Titre: Lois de paroi compatibles pour les modèles de turbulence à bas-
Title: Reynolds

Auteur: Laurier Lambert
Author:

Date: 2019

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Lambert, L. (2019). Lois de paroi compatibles pour les modèles de turbulence à
Citation: bas-Reynolds [Master's thesis, Polytechnique Montréal]. PolyPublie.
<https://publications.polymtl.ca/4052/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/4052/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** Dominique Pelletier
Advisors:

Programme: Génie mécanique
Program:

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Lois de paroi compatibles pour les modèles de turbulence à bas-Reynolds

LAURIER LAMBERT

Département de génie mécanique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

Génie mécanique

Octobre 2019

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

Lois de paroi compatibles pour les modèles de turbulence à bas-Reynolds

présenté par **Laurier LAMBERT**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Stéphane ÉTIENNE, président

Dominique PELLETIER, membre et directeur de recherche

André GARON, membre

DÉDICACE

À qui de droit,

REMERCIEMENTS

Je voudrais d’abord remercier mon directeur de recherche Dominique Pelletier, pour m’avoir encadré et avoir su répondre à mes questions (non sans souvent en induire de nouvelles). Il a également su me motiver face à l’adversité.

Je souhaite également remercier André Garon, qui m’a également accompagné au sein de ce projet. Son aide et ses conseils furent précieux.

J’adresse finalement mes remerciements à mes collègues Étienne Muller et Yohann Vautrin pour leur aide et conseils. Trop souvent j’ai eu à me tourner vers eux pour déboguer mon programme.

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente le développement et la mise en application de lois de paroi compatibles avec le modèle de turbulence $k-\epsilon$ de Launder-Sharma. Elles sont dites compatibles ou consistantes, car elles résultent de l'intégration jusqu'à la paroi d'un modèle de turbulence bas-Reynolds appliqué à un écoulement de Couette turbulent. On utilise pour cela un solveur éléments finis 1D avec adaptation de maillage (CL1D). La solution de ce problème fournit le profil de la solution dans la région de proche paroi, lequel est tabulé pour imposer les conditions limites compatibles dans un solveur 2D (CAYF). Cette approche réduit considérablement le coût de calcul comparativement à l'intégration jusqu'à la paroi, puisque le solveur 2D n'a pas à résoudre l'entière de la couche limite. La perte de précision est minimale, d'une part parce que les conditions limites sont compatibles avec le modèle, ce qui assure que la solution ne dépend pas de la position du premier point de calcul, et d'autre part parce que l'adaptation de maillage permet de contrôler la précision et la taille du tableau de données.

Le modèle $k-\epsilon$ de Launder-Sharma est sélectionné, notamment en raison de son implémentation partielle existante dans les solveurs 1D et 2D, mais aussi en raison de difficultés numériques lors d'essais préliminaires avec d'autres modèles de turbulence. Une attention particulière est portée à la modélisation des termes source bas-Reynolds. Le terme source dans l'équation de ϵ pose doublement problème : son écriture est ambiguë et il n'est pas directement applicable en éléments finis. L'ambiguïté est levée par une revue de littérature. Pour permettre l'implémentation dans un cadre d'éléments finis, la dérivée seconde apparaissant dans le terme source de Launder-Sharma est réécrite en introduisant une variable de relèvement, ce qui nécessite la résolution d'une équation différentielle supplémentaire, laquelle doit également être implémentée dans les solveurs.

Les solveurs 1D et 2D ont fait l'objet de tests de vérification systématique par la méthode des solutions manufacturées, ainsi qu'en étudiant l'influence de la distance de raccordement de la loi de paroi sur la solution. Nous avons aussi procédé à la validation des prédictions en comparant nos prédictions vérifiées : à des données DNS pour un écoulement de Couette turbulent, à des corrélations semi-empiriques pour une couche limite sur une plaque plane et à des données expérimentales pour une marche descendante. Les lois de paroi consistantes sont un bon outil pour la modélisation des parois dans ces cas, mais présentent des faiblesses près des points de stagnation, là où les hypothèses sur lesquelles elles sont fondées ne tiennent pas.

ABSTRACT

This thesis presents the development and application of compatible wall functions, using the Launder-Sharma k - ϵ turbulence model. These wall functions are said to be compatible or consistent as they result from the wall-integration of a low-Reynolds turbulence model applied to turbulent Couette flow. This is done in a 1D finite element solver based on adaptive remeshing (CL1D). Solving this problem yields the dimensionless solution in the near wall region, which is tabulated and used to impose model-compatible boundary conditions in a 2D solver (CADYF). The compatible wall function approach reduces the computational cost as the boundary layer does not need to be wall-resolved. The resulting loss of accuracy is minimal because the boundary conditions are compatible with the turbulence model, ensuring that the solution is independent of the location of the first computational point, and because we rely on adaptive remeshing to control the accuracy of the tabulated data.

We selected the Launder-Sharma k - ϵ model because a prior partial implementation existed in the 1D and 2D solvers, but also because we encountered numerical difficulties during preliminary tests with other turbulence models. Close attention must be paid to the modelling of the low-Reynolds source terms, especially in the ϵ -equation. First, the expression of this term is ambiguous. We select its expression from a literature review. Second, it introduces a second order derivative which requires special treatment in a finite element framework. To implement it, we rewrite the second order derivative by introducing a special-purpose projection variable. This requires solving an extra differential equation, and to implement it in the solvers as well.

Both the 1D and 2D solvers were subjected to systematic verification tests, by the method of manufactured solutions, as well as by studying the influence of the wall function reconnection distance on the solution. We then proceeded to validation by comparing our verified predictions to DNS data for the Couette flow, semi-empirical correlations for the flat plate boundary layer, and experimental data for the backward facing step. Consistent wall functions are an interesting tool for wall modelling and give good results in our applications, except in the vicinity of stagnation points, where the underlying assumptions no longer hold.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	x
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xiii
LISTE DES ANNEXES	xvi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Mise en contexte	1
1.2 Contexte en laboratoire	2
1.3 Objectifs de recherche	3
1.4 Structure du document	3
CHAPITRE 2 ASPECTS MATHÉMATIQUES	4
2.1 Équations du mouvement	4
2.1.1 Turbulence	4
2.1.1.1 Calculs d'écoulements turbulents	5
2.1.2 Équations de Navier-Stokes moyennées	5
2.1.2.1 Hypothèse de Boussinesq	6
2.1.2.2 Modèles de turbulence	8
2.1.3 Forme unidimensionnelle des équations	8
2.2 Algorithmes de résolution	9
2.2.1 Méthode découplée	10
2.2.2 Méthode couplée	10
2.2.3 Méthode semi-couplée	12

2.3	Méthode des éléments finis	12
2.3.1	Traitement des dérivées secondes	14
2.3.1.1	Intégration par parties	14
2.3.1.2	Relèvement de la dérivée	15
2.3.2	Discrétisation	15
2.3.2.1	Forme faible de Galerkin	16
2.3.2.2	Stabilisation SUPG	17
2.3.3	Imposition des valeurs au bord	17
2.3.3.1	Retrait de l'équation	17
2.3.3.2	Méthode de pénalisation	18
2.3.3.3	Imposition d'une correction nulle	18
2.3.3.4	Multiplicateurs de Lagrange	19
2.4	Adaptation de maillage	20
2.4.1	Reconstruction de la solution	21
2.4.2	Estimation d'erreur	22
2.4.3	Stratégie de remaillage	24
2.4.4	Génération de maillage adaptatif	27
CHAPITRE 3	MODÉLISATION DE LA TURBULENCE	28
3.1	Modèle $k-\epsilon$ standard	28
3.2	Modèle $k-\epsilon$ à bas-Reynolds	29
3.2.1	Sélection d'un modèle bas-Reynolds	30
3.2.1.1	Modèle de Chien	30
3.2.1.2	Modèle de Lam-Bremhorst	33
3.2.1.3	Modèle de Launder-Sharma	34
3.3	Modèle $k-\epsilon$ de Launder-Sharma	35
3.3.1	Expression des termes source	36
3.3.1.1	Expression du terme source d'énergie cinétique	36
3.3.1.2	Définition du terme source de dissipation	36
3.3.2	Modélisation du terme E dans les solveurs éléments finis	38
3.3.2.1	Traitement du terme de dérivée seconde dans CL1D	39
3.3.2.2	Traitement du terme de dérivée seconde dans CADYF	39
3.4	Forme reformulée du modèle de Launder-Sharma	41
3.4.1	Simplification en 1D	42
3.4.2	Variables logarithmiques	42

CHAPITRE 4	TRAITEMENT DES PAROIS	45
4.1	Loi de la paroi	45
4.1.1	Équations de la loi de la paroi	47
4.1.2	Lois de la paroi généralisées	47
4.2	Intégration jusqu'à la paroi	48
4.3	Lois de paroi	49
4.3.1	Loi de paroi standard	51
4.3.1.1	Loi de paroi à une échelle de vitesse	53
4.3.1.2	Loi de paroi à deux échelles de vitesse	54
4.3.2	Loi de paroi compatible	55
4.3.2.1	Loi de paroi compatible à une échelle de vitesse	56
4.3.2.2	Loi de paroi compatible à deux échelles de vitesse	56
4.4	Approches alternatives	57
CHAPITRE 5	APPLICATION NUMÉRIQUE	58
5.1	Applications unidimensionnelles	58
5.1.1	Vérification de CL1D par la méthode des solutions manufacturées	58
5.1.2	Génération du tableau de données de loi de paroi adaptative	63
5.1.3	Test de raccordement	67
5.1.4	Comparaison avec des données de DNS	71
5.2	Applications bidimensionnelles	73
5.2.1	Vérification de CADYF par la méthode des solutions manufacturées	73
5.2.2	Test de raccordement	77
5.2.3	Couche limite turbulente sur une plaque plane	85
5.2.4	Marche descendante	93
CHAPITRE 6	CONCLUSION	103
6.1	Synthèse des travaux	103
6.2	Limitations de la solution proposée	103
6.3	Améliorations futures	104
RÉFÉRENCES		105
ANNEXES		110

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Constantes du modèle $k-\epsilon$ standard	28
Tableau 3.2	Expressions en 2D du terme en dérivée seconde du modèle Launder-Sharma	38
Tableau 5.1	Ordres de convergence de l'erreur	60
Tableau 5.2	Comparaison de l'erreur estimée sur des maillages adaptatifs et non-adaptatifs	66
Tableau 5.3	Valeurs de distance de raccordement	68
Tableau 5.4	Paramètres de la solution manufacturée 2D	74
Tableau 5.5	Conditions limites de la solution manufacturée	76
Tableau 5.6	Ordres de convergence de l'erreur	76
Tableau 5.7	Valeurs de distance de raccordement	79
Tableau 5.8	Conditions limites pour le calcul de la couche limite sur une plaque plane	86
Tableau 5.9	Paramètres de loi de paroi pour la plaque plane	87
Tableau 5.10	Coefficient de friction sur la plaque plane	92
Tableau 5.11	Conditions limites pour le calcul de la marche descendante	94
Tableau 5.12	Longueur de recirculation	97

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Algorithme decouplé	11
Figure 2.2	Algorithme couplé	13
Figure 2.3	Algorithme semi-couplé	13
Figure 2.4	Patch élémentaire de type Zhu-Zienkiewicz	21
Figure 2.5	Taille de maille dans la couche limite	26
Figure 3.1	Écoulement asymétrique dans un canal plan	31
Figure 3.2	Discontinuité du modèle de Chien	31
Figure 3.3	Structure matricielle de la résolution du modèle $k-\epsilon$	33
Figure 4.1	Loi de la paroi et solutions asymptotiques près de la paroi	46
Figure 4.2	Domaines pour l’approche de loi de paroi	50
Figure 4.3	Lois de paroi en volumes finis	50
Figure 5.1	Erreur de la solution manufacturée pour des éléments linéaires	61
Figure 5.2	Erreur de la solution manufacturée pour des éléments quadratiques	62
Figure 5.3	Taille des éléments des maillages adaptatifs	64
Figure 5.4	Taille des éléments prescrite et générée	65
Figure 5.5	Distribution de l’erreur élémentaire sur maillages adaptatifs	66
Figure 5.6	Modélisation 1D d’un écoulement de Couette	67
Figure 5.7	Profils adimensionnels de la solution du problème de Couette 1D avec lois de paroi adaptatives	69
Figure 5.8	Comparaison des résultats de DNS et sous CL1D	72
Figure 5.9	Modélisation de la solution manufacturée	74
Figure 5.10	Maillages pour la solution manufacturée	75
Figure 5.11	Erreur de la solution manufacturée avec stabilisation SUPG	78
Figure 5.12	Erreur de la solution manufacturée en discrétisation de Galerkin	78
Figure 5.13	Indices d’efficacité pour la solution manufacturée	79
Figure 5.14	Modélisation 2D d’un demi-écoulement de Couette	80
Figure 5.15	Profils adimensionnels de la solution du problème de Couette 2D avec lois de paroi adaptatives	82
Figure 5.16	Vue rapprochée sur le raccordement de k	84
Figure 5.17	Modélisation de la plaque plane	85
Figure 5.18	Modélisation du bord de la plaque plane	85
Figure 5.19	Vue d’ensemble des maillages adaptatifs	89
Figure 5.20	Vue rapprochée des maillages adaptatifs près du bord d’attaque	90

Figure 5.21	Convergence en maillage pour la plaque plane	91
Figure 5.22	Coefficient de friction sur la plaque plane	92
Figure 5.23	Modélisation de la marche descendante	95
Figure 5.24	Maillages adaptatifs près de la marche descendante	96
Figure 5.25	Coefficient de friction pour la marche descendante	96
Figure 5.26	Distance de raccordement de la loi de paroi pour la marche descendante	99
Figure 5.27	Énergie cinétique de turbulence à la paroi le long de la marche	99
Figure 5.28	Coefficient de pression pour la marche descendante	100
Figure 5.29	Profils de vitesse pour la marche descendante	101
Figure 5.30	Lignes de courant au voisinage de la marche descendante	102

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Abréviations

1D	Une Dimension
2D	Deux Dimensions
3D	Trois Dimensions
CL1D	Couche Limite 1D
CADYF	Calcul et Analyse de la DYnamique des Fluides Computer Analysis of the DYnamics of Fluids
DNS	Direct Numerical Simulation
LES	Large Eddy Simulation
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes
DDL	Degré De Liberté
SUPG	Streamline Upwind Petrov-Galerkin
SST	Shear Stress Transport

Notations

k	Scalaire k
\mathbf{u}	Vecteur \mathbf{u}
∇k	Gradient de k
$\nabla \mathbf{u}$	Gradient de \mathbf{u}
$\nabla \cdot \mathbf{u}$	Divergence de \mathbf{u}
$\nabla^2 k$	Laplacien de k
$\nabla^2 \mathbf{u}$	Laplacien de \mathbf{u}
F	Partie moyenne de f
f'	Partie fluctuante de f
\bar{k}	Moyenne de k
$\bar{\mathbf{u}}$	Moyenne de \mathbf{u} (par composante)
i, j, k	Indices entiers
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Base orthonormale de \mathbb{R}^3
$P_n P_m$	Interpolant de degré n en vitesse et de degré m en pression
$\mathcal{O}(x^p)$	Ordre p en x
$\exp(x), e^x$	Fonction exponentielle
R_u	Résidu de l'équation de u

Définitions

\mathbf{u}	Vitesse
p	Pression
ρ	Masse volumique
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
μ_t, ν_t	Viscosité turbulente
k	Énergie cinétique de turbulence
ϵ	Dissipation de l'énergie cinétique de turbulence
$\tilde{\epsilon}$	Dissipation modifiée (bas-Reynolds)
ω	Taux de dissipation
\mathcal{K}	Logarithme de k
\mathcal{E}	Logarithme de ϵ
w	Relèvement de la dérivée de u
ω	Vorticité
ω, ω_z	Amplitude de la vorticité (1D, 2D)
$\text{Re}, \text{Re}_x, \text{Re}_L$	Nombre de Reynolds
Re_t, R_t, R_y	Nombre de Reynolds turbulent
D	Terme source bas-Reynolds pour k
E	Terme source bas-Reynolds pour ϵ
$c_1, c_2, c_\mu, \sigma_k, \sigma_\epsilon$	Constantes de fermeture
f_1, f_2, f_μ	Fonctions d'amortissement
κ	Constante de von Kármán
τ	Cisaillement
τ_w, τ_p	Cisaillement pariétal
u_τ, u_k, u_p, u_c	Échelles de vitesse
d	Distance de raccordement
d^+	Distance de raccordement adimensionnelle
y^+	Distance adimensionnelle
$u^+, k^+, \epsilon^+ \dots$	Variables adimensionnelles
c_f	Coefficient de friction
c_p	Coefficient de pression
\mathbf{n}	Vecteur normal
Ω	Domaine
Γ	Frontière
φ	Fonction test

N	Nombre de nœuds
N	Nombre d'éléments
N	Nombre de degrés de liberté
θ	Indice d'efficacité de l'estimateur d'erreur
δ, h	Taille élémentaire
δ	Épaisseur de couche limite
δu	Correction de u
δ_{ij}	Delta de Kroenecker

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A	FORME FAIBLE DES ÉQUATIONS	110
ANNEXE B	ORDRES DE CONVERGENCE DE LA SOLUTION MANUFACTU- RÉE	113
ANNEXE C	TABLEAU DE DONNÉES DE LOI DE PAROI COMPATIBLE . . .	116
ANNEXE D	LOI DE LA PAROI GÉNÉRALISÉE AVEC GRADIENT DE PRES- SION	118

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Mise en contexte

La mécanique des fluides joue un rôle important dans l'industrie. Il suffit de penser à l'aérodynamique, l'hydrodynamique, l'hydrologie ou la météorologie. Un des objectifs en génie est de pouvoir prédire les performances d'un système à des fins de design ou d'analyse. On compte essentiellement deux façons de procéder.

La première approche est expérimentale. Dans ce cas, on mesure la vitesse, la pression, la température, etc., sur un objet réel soumis aux conditions physiques attendues. Par exemple, on peut placer une maquette dans une veine d'essai en soufflerie, et mesurer les forces aérodynamiques agissant sur la maquette, ou encore prendre des mesures de vitesse et de pression dans des conduites aux caractéristiques physiques variées. Les principaux désavantages de l'approche expérimentale sont les contraintes de coût et de temps. En effet, puisque chaque mesure demande de l'équipement spécialisé et des techniciens, et que les mesures doivent ensuite être traitées et analysées, cette approche s'avère très onéreuse. En contrepartie, les résultats sont généralement fiables, puisque les lois de la physique n'ont pas à être modélisées et simulées.

La seconde approche est la simulation numérique. Dans ce cas, une maquette virtuelle est construite et soumise informatiquement aux conditions physiques attendues. La maquette est simulée par un programme de calcul, qui prédit les résultats. Par exemple, on peut simuler l'écoulement dans une conduite, en le modélisant par le biais d'équations. Les simulations numériques sont bien plus pratiques que la prise de mesures expérimentales, car elles ne nécessitent qu'un accès à un ordinateur. On peut aisément varier les conditions comme la vitesse ou l'orientation des objets simulés. En contrepartie, la principale difficulté est d'assurer la justesse des résultats, puisque la modélisation d'un phénomène physique introduit des erreurs de modélisation et que la simulation introduit des erreurs numériques. De manière générale, l'erreur ainsi introduite est considérée assez faible (versus les coûts) pour justifier l'usage de cette approche. La simulation est donc vastement utilisée en industrie pour la conception de systèmes.

On compte également deux principales classes d'écoulements, caractérisés par le nombre de Reynolds (Re). Les écoulements *laminaires* sont des écoulements à bas nombre de Reynolds. Ils sont généralement caractérisés par des fluides très visqueux ou à basse vitesse. À l'opposé, les écoulements *turbulents* se produisent à grand nombre de Reynolds, et sont marqués par un

fluide peu visqueux ou à grande vitesse. La majorité des écoulements fluides d'intérêt industriel sont turbulents. À titre d'exemple, on peut penser à la voilure d'un avion, l'écoulement dans une turbine hydraulique, la ventilation d'un bâtiment, un aqueduc... La prépondérance de ce type d'écoulement pousse les ingénieurs à développer des méthodes de simulation des écoulements turbulents. Or, une particularité de la turbulence est la difficulté inhérente à sa modélisation.

Le présent travail de recherche s'inscrit dans l'optique de développer des outils numériques pour la simulation d'écoulements turbulents.

1.2 Contexte en laboratoire

Les principales activités du laboratoire du Pr. Pelletier consistent à développer comme logiciel de recherche un solveur éléments finis d'usage général **CADYF** (Calcul et Analyse de la DYnamique des Fluides). Ce logiciel, initialement développé par Dominique Pelletier, incorpore les contributions de plusieurs étudiants et chercheurs.

Le logiciel résultant est un solveur éléments finis pour le calcul d'écoulements laminaires ou turbulents, incompressibles ou compressibles, avec ou sans transfert de chaleur, incluant les interactions fluide-structure. De nombreuses contributions n'ajoutent pas directement aux capacités du solveur mais plutôt à son efficacité. Ainsi, le solveur incorpore notamment un algorithme monolithique, des méthodes adaptatives en espace et en temps, des transformations de variables garantissant la positivité et des outils intégrés de vérification.

Le laboratoire développe également à titre d'utilitaire, donc en support à **CADYF**, un solveur éléments finis 1D spécialisé, **CL1D**. Celui-ci sert à la génération des tableaux de données des lois de paroi compatibles. Ce solveur est beaucoup plus récent, et fait suite aux travaux de Frazza [1]. Lacombe [2] s'en est servi pour développer les lois de paroi thermiques et Amrom [3] pour des lois de paroi avec gradient de pression.

Nous nous devons d'insister sur la différence entre les deux logiciels : le solveur **CL1D** est à la base conçu pour générer un tableau de conditions limites pour **CADYF**, ayant peu d'utilité en soi. Notons toutefois que l'utilisation que nous en faisons excède ce cadre ; on s'en sert non seulement pour générer les tableaux, mais également à des fins de vérification et validation de la forme 1D du modèle de turbulence.

1.3 Objectifs de recherche

Le but du projet de recherche est de développer des lois de paroi compatibles et de les appliquer à des écoulements turbulents.

Pour atteindre ce but, nous avons défini les objectifs de recherche suivants :

1. Développer un code éléments finis 1D adaptatif pour résoudre un écoulement de Couette turbulent ;
2. Appliquer le code 1D pour établir des lois de paroi compatibles sous forme de tableau ;
3. Vérifier l'implémentation des lois de paroi compatibles ;
4. Appliquer la méthodologie à des écoulements turbulents d'intérêt pratique.

1.4 Structure du document

Le chapitre 2 expose certaines considérations mathématiques d'importance pour le projet. La sélection et formulation du modèle de turbulence utilisé sont détaillées au chapitre 3. La question de la modélisation des parois, et plus particulièrement des lois de paroi compatibles, est traitée au chapitre 4. Finalement, le chapitre 5 présente la mise en application numérique du modèle de turbulence et des lois de paroi compatibles dans des cas de vérification et validation.

CHAPITRE 2 ASPECTS MATHÉMATIQUES

Ce chapitre présente une revue des aspects mathématiques constituant la base théorique de notre projet de recherche. On introduit en premier lieu les équations du mouvement pour les écoulements incompressibles turbulents. On discute ensuite de la résolution numérique du problème dans une section traitant des algorithmes de résolution puis une autre portant sur la méthode des éléments finis. Finalement, on discute de la méthodologie d'adaptation de maillage.

2.1 Équations du mouvement

Les équations régissant le mouvement d'un fluide sont les équations de Navier-Stokes. Nos travaux se limitent aux écoulements incompressibles. Pour une masse volumique constante, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.1a) \\ (2.1b) \end{array}$$

La première équation est l'équation de conservation de la masse. La seconde est une équation vectorielle et correspond à la conservation de la quantité de mouvement dans chaque direction.

2.1.1 Turbulence

Nous nous intéressons particulièrement à l'étude d'une classe restreinte d'écoulements, les écoulements turbulents, qui présentent d'importants défis en raison de la nature complexe de la turbulence. Il est difficile de produire une bonne définition de ce qu'est la turbulence. Dans l'ensemble, on retiendra qu'il s'agit d'un phénomène tourbillonnaire qui mélange (transporte) et dissipe. La turbulence couvre un large spectre d'échelles spatio-temporelles, allant de l'échelle presque moléculaire jusqu'à la taille de l'écoulement. On peut prendre l'exemple de l'atmosphère, où ces échelles peuvent s'étendre de 10^{-6} m à 10^3 m.

La question principale est de savoir comment l'on peut simuler des écoulements turbulents pour en tirer des prédictions fiables et utiles.

2.1.1.1 Calculs d'écoulements turbulents

Les équations de Navier-Stokes décrivent correctement un écoulement turbulent. Cependant, leur application directe pour calculer un écoulement turbulent, nécessite de résoudre jusqu'aux plus petites échelles de turbulence. Cette approche est la simulation DNS (*Direct Numerical Simulation*). Elle est extrêmement exigeante au niveau du coût de calcul, puisqu'elle demande de résoudre les équations 3D à des échelles de temps et d'espace très petites. En raison des coûts de simulation, elle se limite aux applications en recherche à des nombres de Reynolds relativement bas. La puissance de calcul des ordinateurs modernes ne permet simplement pas d'appliquer la simulation directe à des écoulements turbulents d'intérêt industriel.

À l'inverse, l'approche RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) simule uniquement l'écoulement moyen, donc sans résoudre les échelles turbulentes. Ainsi, les coûts de calculs sont bien moindres, puisque la turbulence est simplement modélisée. L'approche RANS est de loin la plus courante en industrie. La nécessité de modéliser la turbulence, résulte en une multitude de modèles de turbulence RANS, ayant chacun ses forces et faiblesses. C'est cette approche que nous utilisons et détaillons ci-après.

Une autre approche se situant entre les approches DNS et RANS est la méthode LES (*large eddy simulation*), qui simule les grandes échelles de turbulence seulement. Il y a donc un compromis entre la modélisation et la simulation puisque les petites échelles sont modélisées, mais le coût de calcul est plus imposant qu'en RANS. Cette approche voit des applications en industrie, mais n'est pas aussi populaire que les modèles RANS.

2.1.2 Équations de Navier-Stokes moyennées

Une façon de représenter la turbulence consiste à la voir de manière statistique. On suppose que les champs des variables sont des variables aléatoires, auxquelles on applique la décomposition de Reynolds, qui consiste à séparer chaque quantité f en la somme d'une partie moyenne F et d'une partie fluctuante f' :

$$f = F + f'$$

On considère alors la moyenne de f , notée \bar{f} . La moyenne doit respecter les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
& \text{— } \bar{f} = F \\
& \text{— } \overline{f'} = 0 \\
& \text{— } \overline{c_1 f + c_2 g} = c_1 \bar{f} + c_2 \bar{g} \\
& \text{— } \overline{\bar{f} g} = \bar{f} \bar{g} = \bar{f} \bar{g} \\
& \text{— } \overline{\nabla f} = \nabla \bar{f} \\
& \text{— } \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Les équations de Navier-Stokes moyennées s'obtiennent en appliquant la décomposition de Reynolds aux équations (2.1), puis en en prenant la moyenne. Après ces opérations, on retient le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.2a) \\ (2.2b) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot \left(\mu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \end{array} \right. \quad (2.2c)$$

Notons que l'équation de continuité a la particularité de s'appliquer aux vitesses moyennes et aux fluctuations. Ceci n'est pas particulièrement étonnant, il ne faut pas s'attendre à ce que les fluctuations de vitesse génèrent ou détruisent de la masse.

Le terme non-linéaire de convection a fait apparaître le produit de quantités fluctuantes $u'_i u'_j$, dont la moyenne $\overline{u'_i u'_j}$ n'est pas connue et ne se simplifie pas. Ce terme, désigné *tenseur de Reynolds*, est ramené au membre de droite, et agit comme une contrainte supplémentaire sur le fluide attribuable à la turbulence.

Pour le reste du document, nous simplifions la notation en omettant la moyenne (sauf indication contraire), puisque nous ne travaillons qu'avec des quantités moyennes.

2.1.2.1 Hypothèse de Boussinesq

La présence du terme de contrainte de Reynolds pose problème. En effet, ce terme introduit 6 nouvelles inconnues aux équations 3D, les corrélations $\overline{u'_i u'_j}$, mais aucune équation supplémentaire. Le problème est donc sous-déterminé et on ne peut pas le résoudre. On peut tenter d'introduire de nouvelles équations pour les contraintes de Reynolds. Or, Wilcox [4] montre que ce processus introduit 22 nouvelles inconnues, dont des corrélations triples comme $\overline{u'_i u'_j u'_k}$,

sans que l'on ajoute d'équations pour ces nouvelles quantités. On peut répéter ce processus *ad nauseam* mais on introduira toujours plus d'inconnues que d'équations. On nomme ce phénomène le *problème de fermeture*.

Ainsi, pour contourner le problème de fermeture, des hypothèses doivent être faites pour modéliser ces inconnues. Tous les modèles doivent proposer une façon de simplifier le système ou proposer de nouvelles équations pour les corrélations.

L'approche la plus courante pour la modélisation de la turbulence est l'hypothèse de Boussinesq. Celle-ci introduit le concept de *viscosité turbulente*, par lequel on suppose que les contraintes de Reynolds agissent similairement à une contrainte visqueuse non-linéaire. Notons que cette approche réduit les 6 tensions de Reynolds à un unique scalaire, lié aux propriétés locales et instantanées de l'écoulement. Ainsi, le terme supplémentaire des équations de Navier-Stokes moyennées est modélisé par

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.3)$$

où δ_{ij} est le delta de Kroenecker, valant 1 si $i = j$ et 0 sinon. La grandeur k est l'énergie cinétique de turbulence, égale à la demi-trace du tenseur de Reynolds : $k = \frac{1}{2}(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})$. Notons que μ_t est une propriété de l'écoulement, et non pas du fluide.

En appliquant l'hypothèse de Boussinesq, on introduit également un terme supplémentaire $\frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$. Pour simplifier la notation et faciliter l'identification avec les équations de Navier-Stokes, ce terme est considéré comme une « pression turbulente ». On résout donc pour un terme de pression modifié, dont le gradient apparaît en prenant la divergence de cette contribution supplémentaire. La pression modifiée s'écrit :

$$\tilde{P} = P + \frac{2}{3}\rho k$$

Finalement, on peut réécrire les équations du mouvement à l'aide de la viscosité turbulente et de la pression modifiée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \\ \rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla \tilde{P} + \nabla \cdot ((\mu + \mu_t) (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^\top)) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.4a) \\ (2.4b) \end{array}$$

Notons que l'équation de continuité des fluctuations de vitesse n'est plus nécessaire ; ces quantités ne sont pas des inconnues du problème puisque l'on ne résout que l'écoulement moyen. Afin d'alléger la notation, on omet le tilde sur la pression modifiée pour le reste du document.

2.1.2.2 Modèles de turbulence

L'hypothèse de viscosité turbulente sert à la fermeture de plusieurs modèles de turbulence. Ceux-ci peuvent prendre plusieurs formes, mais on les désigne souvent en fonction du nombre d'équations différentielles qu'ils utilisent. Ainsi, on parle de modèles dits à 0 équation ou algébriques, à 1 équation et à 2 équations.

Les modèles algébriques n'utilisent pas d'équation différentielle. La viscosité turbulente est fixée algébriquement, par exemple à partir d'une longueur de mélange. C'est donc une relation algébrique qui détermine la viscosité turbulente, plutôt qu'une équation différentielle. D'après Wilcox [4], de tels modèles sont incomplets puisque la longueur de mélange dépend de l'écoulement et du type d'écoulement. Il faut donc connaître l'écoulement au préalable pour le modéliser.

Les modèles à une équation introduisent une équation différentielle pour une quantité liée à la turbulence, comme l'énergie cinétique de turbulence ou la viscosité turbulente. Ces modèles offrent davantage de généralité mais demeurent incomplets puisque la longueur caractéristique de la turbulence demeure liée à une dimension physique du problème.

Les modèles à deux équations introduisent une équation supplémentaire. De manière générale, ces équations servent à déterminer une échelle de longueur et une de temps. En ce sens, il s'agit de modèles dits *complets* puisqu'ils ne demandent pas de connaissance *a priori* de l'écoulement. Notons toutefois qu'ils emploient tout de même des hypothèses pouvant en limiter l'applicabilité. Pour ce projet, nous considérons uniquement des modèles de turbulence à deux équations, plus particulièrement les modèles $k-\epsilon$. Nous en discutons de manière plus approfondie au chapitre 3.

2.1.3 Forme unidimensionnelle des équations

Le solveur CL1D résout l'écoulement de Couette, puisque les lois de paroi en découlent. Cet écoulement étant unidimensionnel, il faut pour le modéliser appliquer des simplifications aux équations du mouvement pour ne retenir qu'une seule dimension. Pour obtenir les simplifications 1D des équations, on fait simplement l'hypothèse que la vitesse verticale v est nulle : $v = 0$. Il s'agit d'une hypothèse nécessaire et suffisante pour retrouver la forme 1D des équations. Cette hypothèse permet également de tirer nombre de conclusions quant à la nature du problème et à sa résolution.

En substituant cette hypothèse dans les équations RANS en régime permanent, elles se simplifient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.5a) \\ (2.5b) \\ (2.5c) \end{array}$$

On en déduit trois remarques importantes :

1. La conservation de la masse est automatiquement respectée ;
2. La pression est indépendante de y et son gradient axial est une constante ;
3. Toutes les dérivées en x (sauf pour p) sont nulles.

La deuxième remarque est particulièrement importante. Puisque la pression et son gradient sont constants sur le domaine, on en tire deux implications au niveau de l'implémentation :

1. La pression n'est pas une variable du problème ;
2. Le gradient de pression est implémenté comme un terme source de valeur constante.

Ainsi la seule équation à résoudre est l'équation (2.5b). Le fait de ne pas avoir à résoudre la pression est intéressant. En effet, on s'affranchit ainsi d'une contrainte sur la discrétisation du problème. En 2D, il faut s'assurer que l'interpolant pour la pression soit d'un degré inférieur à l'interpolant utilisé pour la vitesse, sans quoi il est impératif d'incorporer un schéma de stabilisation. Par exemple, on utilise l'élément de Taylor-Hood (P_2P_1), avec un interpolant linéaire pour la pression et quadratique pour les vitesses, sans avoir à stabiliser la pression. *A contrario*, les éléments P_1P_1 et P_2P_2 nécessitent de stabiliser la pression. En s'affranchissant de cette condition sur la discrétisation, on peut résoudre le problème 1D avec le même interpolant pour toutes les variables. Ceci facilite la mise en œuvre. Également, l'interpolant peut être linéaire sans poser de problème particulier, à l'opposé du triangle P_1P_1 . Ceci résulte en des calculs plus rapides et facilite le débogage.

La modélisation du gradient de pression comme un terme source constant simplifie également la mise en œuvre, en éliminant le besoin de tout traitement spécial de ce terme. Également, notons que la contribution de l'énergie cinétique à la pression (modifiée) disparaît au niveau du gradient de pression puisque $\partial k / \partial x = 0$.

2.2 Algorithmes de résolution

La méthode de résolution numérique employée est la méthode de Newton. Pour un système d'équations $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ et connaissant un estimé initial \mathbf{x}_0 , cette méthode permet de trouver $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

en appliquant successivement une correction $\delta \mathbf{x}$.

$$\begin{aligned} [J(\mathbf{x}_n)][\delta \mathbf{x}_n] &= -[F(\mathbf{x}_n)] \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \delta \mathbf{x}_n \end{aligned}$$

La matrice J est la matrice Jacobienne de \mathbf{F} . Dans notre cas, on cherche à annuler le résidu \mathbf{R} des équations du mouvement et de turbulence.

Les solveurs mettent également en oeuvre différents algorithmes de couplage. Les trois formes, décrites ci-dessous, sont les méthodes découplée, couplée et semi-couplée.

2.2.1 Méthode découplée

Dans la méthode découplée, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont résolues indépendamment des équations du modèle de turbulence. Conceptuellement, l'algorithme est illustré à la figure 2.1. On y recense trois niveaux de boucles. La boucle globale assure la résolution du système jusqu'à convergence. Un deuxième niveau de boucle sert à des itérations de point fixe sur la viscosité turbulente. Au troisième niveau, on itère avec la méthode de Newton pour la résolution de chaque système (non-)linéaire. Les boucles de deuxième et troisième niveaux peuvent être limitées à une seule itération, mais celle de premier niveau doit itérer jusqu'à convergence du système. Ainsi, le solveur va résoudre pour u, v, p , puis résoudre pour μ_t , en résolvant successivement pour k puis ϵ .

Cette méthode a un faible coût en termes de mémoire requise, puisque le plus gros système matriciel ne contient que les équations de u, v et p . Cette méthode est également la moins sensible des trois à l'estimé initial. En contrepartie, elle converge relativement lentement en raison des itérations de point fixe nécessaires sur la viscosité turbulente. Les nombreux termes de couplage entre la vitesse et les quantités turbulentes dans les autres méthodes sont ici absents.

Notons que CADYF ne supporte plus l'algorithme découplé, puisque ses avantages sont considérés négligeables face à la combinaison des approches couplée et semi-couplée, et en raison de l'effort requis pour maintenir le code peu utilisé.

2.2.2 Méthode couplée

La méthode couplée [5] résout simultanément toutes les équations. On nomme aussi cette approche *monolithique*, car elle constitue une seule matrice. La figure 2.2 illustre cet algorithme conceptuellement simple. Une seule boucle itérative est nécessaire.

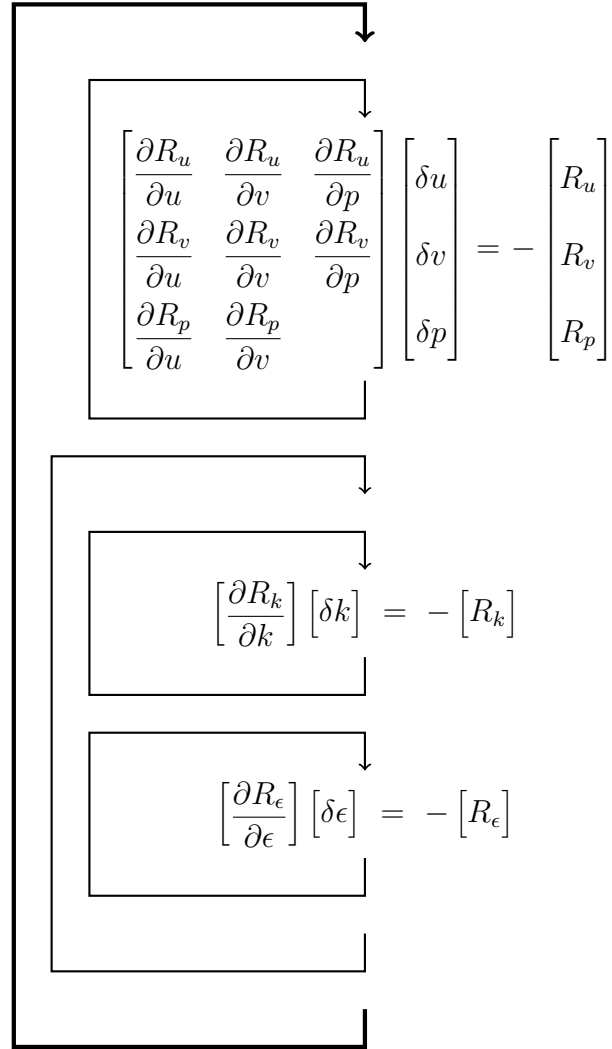


Figure 2.1 Algorithme decouplé

Cette méthode demande beaucoup plus de mémoire puisque toutes les équations sont assemblées dans une même matrice. En raison du couplage fort entre les équations, elle est particulièrement sensible à l'estimé initial. La méthode de Newton a un petit bassin de convergence, c'est-à-dire qu'elle ne converge généralement pas si la solution initiale n'est suffisamment pas bonne. En revanche, la méthode converge rapidement lorsque l'estimé est assez bon. On peut montrer que sous les bonnes conditions, elle atteint la convergence quadratique, où l'erreur est mise au carré à chaque itération : $|r_{n+1}| = c|r_n|^2$, $|r| < 1$, ce qui fait qu'elle tend très rapidement vers 0.

2.2.3 Méthode semi-couplée

La méthode semi-couplée consiste à résoudre les équations de continuité et de quantité de mouvement indépendamment des équations du modèle de turbulence, mais en gardant le couplage entre les équations de turbulence. La figure 2.3 présente l'algorithme.

Tel qu'on le voit, la matrice du système compte deux blocs découplés l'un de l'autre. Idéalement, le solveur devrait résoudre ce système en deux boucles comme on fait pour l'approche découplée. Notons toutefois qu'en pratique, la méthode semi-couplée est construite en une seule matrice comme pour la méthode couplée. Ainsi, elle a le même coût en mémoire que la méthode couplée, et converge moins rapidement. Par contre, son principal avantage par rapport à l'approche couplée est qu'elle est moins sensible à l'estimé initial de la solution. Nous utilisons donc la méthode semi-couplée à partir de la solution initiale pour quelques itérations pour diminuer suffisamment le résidu, puis passons à la méthode couplée pour converger rapidement.

2.3 Méthode des éléments finis

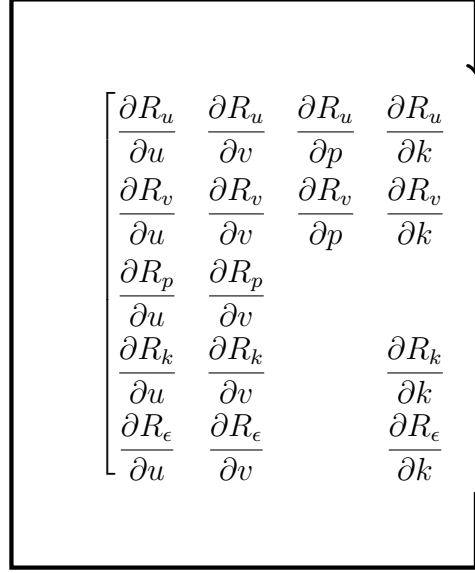
La méthode des éléments finis est une des principales méthodes de discrétisation d'un problème d'équations différentielles employée en mécanique des fluides numérique.

Pour illustrer, considérons l'équation de la chaleur :

$$-\nabla \cdot (k \nabla T) = q \quad (2.6)$$

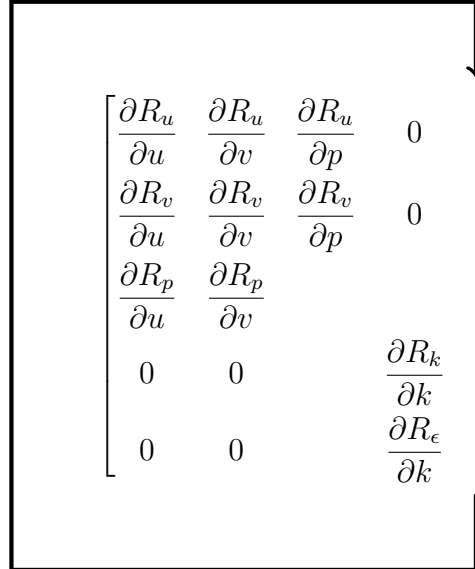
La méthode des éléments finis procède en affaiblissant le problème. On obtient la forme faible en multipliant l'équation (2.6) par une fonction *test* φ et en intégrant sur le domaine Ω :

$$-\int_{\Omega} \varphi \nabla \cdot (k \nabla T) d\Omega = \int_{\Omega} \varphi q d\Omega \quad (2.7)$$



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_u}{\partial u} & \frac{\partial R_u}{\partial v} & \frac{\partial R_u}{\partial p} & \frac{\partial R_u}{\partial k} & \frac{\partial R_u}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial R_v}{\partial u} & \frac{\partial R_v}{\partial v} & \frac{\partial R_v}{\partial p} & \frac{\partial R_v}{\partial k} & \frac{\partial R_v}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial R_p}{\partial u} & \frac{\partial R_p}{\partial v} & & & \\ \frac{\partial R_k}{\partial u} & \frac{\partial R_k}{\partial v} & & \frac{\partial R_k}{\partial k} & \frac{\partial R_k}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial R_\epsilon}{\partial u} & \frac{\partial R_\epsilon}{\partial v} & & \frac{\partial R_\epsilon}{\partial k} & \frac{\partial R_\epsilon}{\partial \epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta p \\ \delta k \\ \delta \epsilon \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_u \\ R_v \\ R_p \\ R_k \\ R_\epsilon \end{bmatrix}$$

Figure 2.2 Algorithme couplé



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_u}{\partial u} & \frac{\partial R_u}{\partial v} & \frac{\partial R_u}{\partial p} & 0 & 0 \\ \frac{\partial R_v}{\partial u} & \frac{\partial R_v}{\partial v} & \frac{\partial R_v}{\partial p} & 0 & 0 \\ \frac{\partial R_p}{\partial u} & \frac{\partial R_p}{\partial v} & & & \\ 0 & 0 & & \frac{\partial R_k}{\partial k} & \frac{\partial R_k}{\partial \epsilon} \\ 0 & 0 & & \frac{\partial R_\epsilon}{\partial k} & \frac{\partial R_\epsilon}{\partial \epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta p \\ \delta k \\ \delta \epsilon \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_u \\ R_v \\ R_p \\ R_k \\ R_\epsilon \end{bmatrix}$$

Figure 2.3 Algorithme semi-couplé

On cherche alors une solution au problème faible (2.7). On peut montrer qu'une solution au problème faible est également solution du problème fort (2.6) si φ est bien choisie [6].

La forme faible des équations utilisées dans ce mémoire est donnée à l'annexe A.

2.3.1 Traitement des dérivées secondes

Typiquement, les équations d'intérêt en mécanique des fluides sont des équations différentielles du deuxième ordre. Or, discrétiser des dérivées secondes peut poser certains défis, notamment si elles sont discontinues. Nous abordons ici deux méthodes pour traiter ces termes.

2.3.1.1 Intégration par parties

La méthode d'intégration par parties est la façon classique de traiter les dérivées secondes. Elle permet d'abaisser l'ordre de la dérivée en transférant la dérivée à la fonction test. On peut obtenir une forme généralisée en partant de l'expression de la divergence d'un produit vecteur-fonction.

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{F} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{F}$$

En intégrant de part et d'autre, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{F} d\Omega + \int_{\Omega} \varphi \nabla \cdot \mathbf{F} d\Omega$$

Finalement, en appliquant le théorème de la divergence au membre de gauche puis en réordonnant les termes, on obtient

$$-\int_{\Omega} \varphi (\nabla \cdot \mathbf{F}) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{F} d\Omega - \int_{\Gamma} \varphi \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.8)$$

Par identification avec la forme (2.8), on peut intégrer par parties l'équation (2.7) :

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \varphi \nabla \cdot (k \nabla T) d\Omega &= \int_{\Omega} \varphi q d\Omega \\ \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot (k \nabla T) d\Omega &= \int_{\Omega} \varphi q d\Omega + \int_{\Gamma} \varphi (k \nabla T) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.9)$$

Comme on peut le constater, l'équation résultante n'implique que des dérivées de premier ordre, et introduit un terme de bord.

Condition limite naturelle Le terme de bord introduit par le théorème de divergence est un flux au bord, qui correspond à la *variable secondaire* du problème. On désigne l'imposition de ce flux comme une condition limite naturelle.

Par opposition à la condition naturelle, une condition limite *essentielle* impose la valeur de la variable primaire (condition limite de Dirichlet). Là où une telle condition limite est appliquée, la fonction test vaut 0, annulant le terme de bord. Par conséquent, on ne peut pas imposer simultanément des conditions naturelle et essentielle au même endroit.

2.3.1.2 Relèvement de la dérivée

Une autre façon de traiter une dérivée seconde consiste à former un système d'équations en introduisant une équation pour la dérivée seconde. Une approche similaire est employée pour transformer des ÉDO d'ordre élevé en des systèmes d'ÉDO de premier ordre et vice-versa.

À titre illustratif, on pourrait reformuler l'équation de la chaleur (2.6) en un système d'équations du premier ordre :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k\mathbf{S}) = q & (2.10a) \\ \mathbf{S} = \nabla T & (2.10b) \end{cases}$$

Or, il faut faire attention aux espaces de solutions. Si l'on résout l'équation de départ (2.6) par la méthode des éléments finis, un gradient de température discontinu est parfaitement acceptable. La physique l'admet également, par exemple à l'interface de matériaux différents. À l'inverse, résoudre le système (2.10) résulte nécessairement en un gradient continu. Ainsi, cette approche impose trop de régularité à la solution.

De manière générale, un tel relèvement a pour effet de changer l'espace dans lequel on approxime la solution. Ainsi, on retient que le relèvement de la dérivée est une méthode d'exception. Dans le présent projet, on s'en sert uniquement pour traiter un terme qui ne peut pas être intégré par parties.

2.3.2 Discrétisation

On peut écrire la forme faible discrète, en discrétisant T et en l'interpolant. Soient T_h la température interpolée, T_j la température discrète et L_j les fonctions d'interpolations. Alors,

$$T_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N T_j(\mathbf{x}) L_j(\mathbf{x})$$

où N est le nombre de degrés de liberté. En substituant dans (2.9) et en faisant abstraction du terme de bord, on obtient la forme faible discrète

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot (k \nabla L_j) d\Omega \right) T_j = \int_{\Omega} \varphi_i q d\Omega \quad (2.11)$$

avec $i = 1..N$. Par identification, cette expression est équivalente à un système d'équations sous forme matricielle :

$$A_{ij} T_j = B_i$$

dont la résolution nous donne T_j , la température aux nœuds du maillage.

On obtient différentes formulations dépendamment du choix des fonctions test et d'interpolation.

2.3.2.1 Forme faible de Galerkin

Dans la forme faible de Galerkin, les fonctions test φ sont égales aux fonctions d'interpolation L . En appliquant ce principe à l'équation de la chaleur, on obtient la forme faible de Galerkin :

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} \nabla L_i \cdot (k \nabla L_j) d\Omega \right) T_j = \int_{\Omega} L_i q d\Omega \quad (2.12)$$

Il s'agit d'une façon de discrétiser le problème qui présente certains avantages, dont sa simplicité. Également, on note que pour l'équation donnée en exemple, la matrice A_{ij} résultant de (2.12) est symétrique, ce qui facilite la résolution numérique.

En contrepartie, on peut montrer que la méthode de Galerkin induit une diffusion numérique négative. Pour certains problèmes comme ceux dominés par la convection, cette diffusion numérique peut devenir trop importante et dominer, ce qui affecte la solution en y introduisant des oscillations non physiques. Pour les éliminer, il faut utiliser un maillage très fin ou une méthode de stabilisation.

Le solveur CL1D utilise exclusivement la forme faible de Galerkin. Notons que la forme 1D des équations du mouvement (c.f. section 2.1.3) élimine le terme de convection. Donc, la forme de Galerkin est parfaitement appropriée, rendant inutile la stabilisation des équations.

2.3.2.2 Stabilisation SUPG

Une autre forme faible d'intérêt pour notre projet est la formulation SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*) [7]. Les méthodes Petrov-Galerkin utilisent des fonctions test différentes des fonctions d'interpolation, ce qu'on illustre par la forme faible (2.11).

Sans entrer dans les détails, la forme SUPG est une façon de stabiliser les équations. Il s'agit d'une forme d'*upwinding* ajoutant de la diffusion numérique afin d'empêcher l'apparition d'oscillations non physiques lorsque la convection est dominante. Ceci permet de compenser la diffusion négative introduite par la méthode de Galerkin.

Contrairement à d'autres méthodes de stabilisation, celle-ci est consistante, c'est-à-dire qu'elle n'affecte pas (en théorie) le taux de convergence asymptotique de l'erreur. D'autres méthodes entraînent une dégradation de la précision de la solution, comme le schéma décentré en amont.

La stabilisation SUPG est implémentée dans CADYF et on l'applique presque systématiquement pour la simulation des écoulements turbulents. En effet, il s'agit d'écoulements à haut nombre de Reynolds, dominés par la convection.

2.3.3 Imposition des valeurs au bord

Les conditions limites de type Dirichlet étant un type très courant de condition, il est inévitable d'avoir à imposer des valeurs aux bords du domaine. Il existe plusieurs méthodes pour imposer la valeur d'un degré de liberté. Ces méthodes ne sont pas propres qu'aux éléments finis, mais s'appliquent ici dans ce contexte.

2.3.3.1 Retrait de l'équation

Cette méthode consiste à numéroter les degrés de liberté de sorte à ce que les DDL où l'on impose une condition de Dirichlet ne soient pas assemblés dans la matrice du système. Puisque les valeurs de ces DDL sont imposées, il ne s'agit pas d'inconnues. Donc, il n'est pas nécessaire (et il est même erroné) de les résoudre pour calculer leur valeur.

Un inconvénient de cette approche est l'élimination de termes de couplage dans la matrice. Par exemple, si u au bord dépend de v et que v est fixé, cette dépendance ne peut pas apparaître dans la matrice. Une linéarisation incomplète du problème peut nuire à la convergence de la méthode de Newton.

Notons que retirer ces équations de la matrice en diminue la taille et réduit donc légèrement le coût de calcul. Toutefois, le nombre d'éléments de bord est généralement petit devant le nombre d'éléments total, minimisant cet impact.

2.3.3.2 Méthode de pénalisation

Cette méthode consiste à ajouter à l'équation à résoudre un terme dit de pénalité aux bords pour imposer approximativement la valeur par une contrainte. Par exemple, si l'on veut contraindre $u = u_D$ au bord, on ajoutera à l'équation de u un terme de pénalité : $r(u - u_D)$. Le système d'équations résultant prend la forme

$$\begin{bmatrix} \ddots & \vdots \\ \cdots & a - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \delta u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ b + r(u - u_D) \end{bmatrix}$$

Comme on peut le constater, pour une valeur nulle de r , le problème reprend sa forme non contrainte et la valeur de u au bord sera différente de u_D . Inversement, lorsque la valeur de r est (très) grande, la partie usuelle de l'équation devient négligeable et il ne reste que la contrainte :

$$-r\delta u \approx r(u - u_D) \Rightarrow \delta u \approx u_D - u$$

Comme on le constate, la correction δu résultante équivaut à l'erreur sur la valeur imposée. Ainsi, le DDL tendra vers la valeur voulue : $u + \delta u \rightarrow u_D$. Donc, la méthode de pénalisation demande de choisir r suffisamment grand pour que la contrainte $u = u_D$ domine l'équation, ce qui permet d'imposer approximativement la valeur au bord. Plus la valeur de r est grande, plus la contrainte est imposée fortement.

Cependant, un désavantage de cette approche est que l'utilisation d'une grande valeur de r nuit au conditionnement de la matrice. Plutôt qu'imposer une grande pénalité, l'approche de correction nulle (présentée ci-dessous) s'avère plus simple, et ne détruit pas le conditionnement de la matrice.

2.3.3.3 Imposition d'une correction nulle

Cette méthode consiste à fixer la valeur du degré de liberté dans la solution initiale, puis à s'assurer que la correction y reste nulle au cours de la résolution. La valeur est donc fixée tout au long de la résolution.

En pratique, ceci est fait en éliminant dans la matrice du système les termes dans la colonne correspondant au degré de liberté à imposer, et d'y annuler le résidu. Le résultat est l'ajout d'une équation dans le système de la forme

$$\begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \delta u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le résultat sera donc une correction nulle pour le degré de liberté, maintenant la valeur fixée.

Comme pour le retrait de l'équation, les termes de couplage n'apparaissent pas. Comparativement, elle peut s'avérer plus simple d'implémentation puisqu'elle ne requiert aucune numérotation spécifique et n'a pas d'impact sur la taille du système. Par contre, elle engendre une légère augmentation de la mémoire requise pour stocker et résoudre le système.

La version de CL1D antérieure aux travaux de cette maîtrise utilisait cette méthode. Elle a été remplacée par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Ce choix est en partie justifié par la nécessité de ne pas imposer de condition limite sur certaines variables et pour favoriser la convergence. Il semblait plus général et plus simple de traiter tous les degrés de liberté comme des inconnues et d'y appliquer des contraintes au besoin.

2.3.3.4 Multiplicateurs de Lagrange

Cette méthode consiste à imposer la valeur au bord par une contrainte linéaire. C'est-à-dire que l'on ajoute une contrainte $u = u_D$ comme pour la méthode de pénalisation, mais on introduit également une équation supplémentaire. Cette approche impose la condition de Dirichlet au sens faible, ainsi la valeur résultante au nœud n'est pas exactement celle imposée.

Pour y arriver, un multiplicateur de Lagrange est ajouté à l'élément de bord où le DDL doit être imposé. Ce multiplicateur est ajouté dans l'équation correspondante au degré de liberté à fixer. À titre d'exemple, considérons l'équation suivante, où l'on souhaite imposer $u(0) = u_D$ au bord :

$$-ku'' = f(x)$$

On y ajoute un multiplicateur de Lagrange et l'équation de contrainte associée :

$$\begin{cases} -ku'' = f(x) - \lambda \delta_0 \\ u(0) = u_D \end{cases}$$

où δ_0 est l'impulsion de Dirac. La forme faible résiduelle s'écrit (avec ψ la fonction test pour λ) :

$$\begin{cases} R_u = \int_{\Omega} \varphi' k u' d\Omega - \int_{\Omega} \varphi f(x) d\Omega - \int_{\Gamma} \varphi k u' d\Gamma + \int_{\Gamma} \varphi(0) \lambda \delta_0 d\Gamma \\ R_{\lambda} = \int_{\Gamma} \psi u(0) d\Gamma - \int_{\Gamma} \psi u_D d\Gamma \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations donne la solution $u(x)$ telle que $u(0) = u_D$. Notons que la seconde équation incorpore ici des intégrales de bord sur un domaine unidimensionnel,

soit des évaluations ponctuelles. On comprend toutefois que cette méthode se généralise sans difficulté en 2 et 3 dimensions.

Le multiplicateur de Lagrange sert à imposer la contrainte. On peut toutefois montrer que sa valeur revêt un sens physique particulier. Il s'agit ici du flux ku' au bord. Si le code de calcul a besoin de cette valeur, évaluer le multiplicateur de Lagrange s'avère une meilleure idée que d'approximer le flux autrement. Par exemple, pour l'équation de quantité de mouvement, le multiplicateur de Lagrange imposant la vitesse u équivaut au flux $\mu \partial u / \partial y$, soit le cisaillement pariétal. Nous verrons lors de la définition des conditions limites de type *loi de paroi* (Chapitre 4) que le cisaillement y joue un rôle crucial.

Le coût supplémentaire engendré par cette méthode est l'ajout d'inconnues supplémentaires aux bords. Ceci est en contraste marqué avec la méthode de retrait des équations vue précédemment.

La mise en œuvre dans CL1D de la méthode des multiplicateurs de Lagrange a suscité un léger gain en performance (meilleure convergence itérative), quoique non quantifié. Un autre avantage est que le multiplicateur de Lagrange sur u permet de calculer précisément le cisaillement pariétal et les quantités associées (y^+ notamment). Également, l'imposition des valeurs aux bords par une contrainte permet plus facilement de changer le type de conditions limites d'un problème à l'autre ; il suffit de changer le nombre de multiplicateurs de Lagrange, plutôt que de suivre indépendamment chaque variable pour déterminer si une correction doit s'appliquer ou non. En ce qui concerne les valeurs aux bords, aucune perte de précision n'a été relevée : dans le pire des cas, les valeurs au bord sont de l'ordre de 10^{-20} au lieu de 0, ce qui est négligeable.

2.4 Adaptation de maillage

L'adaptation de maillage *a posteriori* consiste à évaluer l'erreur sur une solution calculée, puis à concentrer les éléments dans les zones où l'erreur est grande, afin de réduire l'erreur. La solution peut donc être résolue plus précisément dans ces zones à l'aide d'un nouveau maillage dit adapté à l'erreur.

Les quatre étapes du processus d'adaptation de maillage pour le solveur 1D sont décrites ci-dessous. En premier lieu, on fait la reconstruction de la solution (ou de ses dérivées). Ensuite, l'erreur est estimée à partir de cette reconstruction. Puis, on utilise une stratégie de remaillage pour prescrire la taille du nouveau maillage. Finalement, le nouveau maillage est généré à partir de cette prescription.

2.4.1 Reconstruction de la solution

La première étape du processus de remaillage adaptatif consiste à obtenir une solution dite reconstruite. La méthode de reconstruction employée est décrite par Zhu et Zienkiewicz [8, 9]. Leur méthode de projection locale reconstruit les dérivées de la solution à l'aide de *patches* élémentaires autour des nœuds. La méthode est dite locale puisque la solution reconstruite se base sur son voisinage plutôt que l'ensemble du domaine. À titre illustratif, la figure 2.4 montre un patch noté Ω_e autour du nœud A sur un maillage 2D. En une dimension, un patch se réduit simplement aux deux éléments voisins d'un nœud.

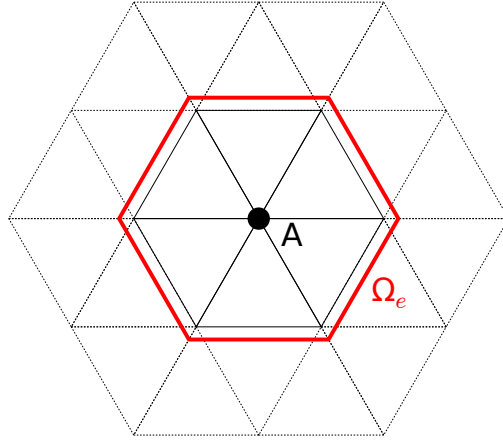


Figure 2.4 Patch élémentaire de type Zhu-Zienkiewicz

Sur chaque patch élémentaire entourant un nœud sommet, la solution reconstruite est ajustée à la solution éléments finis au sens des moindres carrés. Ceci revient à minimiser la fonctionnelle

$$\int_{\Omega_e} (\sigma_h - \sigma^*)^2 d\Omega_e \quad (2.15)$$

où σ est la quantité que l'on souhaite reconstruire (dérivée de la solution), qui est évaluée sur les éléments (σ_h) et projetée sur les patches élémentaires (σ^*). La fonctionnelle (2.15) est minimisée pour chaque patch élémentaire, y donnant les dérivées projetées.

Puisque les nœuds internes aux éléments peuvent appartenir à plusieurs patches, les valeurs projetées en ces points peuvent différer d'un patch à l'autre. La méthode propose de retenir une valeur moyenne pour reconstruire les dérivées de la solution en ces points.

Finalement, on utilise la normalisation des coordonnées de Zhu-Zienkiewicz [10] pour améliorer le conditionnement de la matrice de moindres carrés.

2.4.2 Estimation d'erreur

La deuxième étape du processus consiste à estimer la norme de l'erreur à partir de la solution reconstruite. Nous définissons ci-dessous trois normes pour évaluer l'erreur, que nous utiliserons pour l'adaptation de maillage et pour évaluer l'erreur dans les cas d'application (Chapitre 5).

$$\begin{array}{ll}
\text{Semi-norme } H^1 & |u|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} (\nabla u_{\text{exa}} - \nabla u_h) \cdot (\nabla u_{\text{exa}} - \nabla u_h) d\Omega \\
\text{Norme } L_2 & \|u\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} (u_{\text{exa}} - u_h) \cdot (u_{\text{exa}} - u_h) d\Omega \\
\text{Norme énergie} & |||u|||_e^2 = \int_{\Omega} (\tau_{\text{exa}} - \tau_h) : (\tau_{\text{exa}} - \tau_h) d\Omega
\end{array}$$

Les normes L_2 et H^1 s'appliquent non seulement à \mathbf{u} mais aussi à d'autres quantités comme k , ϵ , \mathcal{K} , etc., alors que la norme énergie sert exclusivement à la vitesse, puisqu'elle utilise le tenseur de contrainte : $\tau = (\mu + \mu_t)(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$. Dans **CADYF**, on a également la possibilité d'évaluer une norme « énergie » sans la viscosité, avec

$$\tau = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (2.16)$$

ce qui est mathématiquement équivalent à la semi-norme H^1 . Notons également que la semi-norme H^1 de \mathbf{u} équivaut à la norme L_2 de $\nabla \mathbf{u}$.

Les normes données ci-dessus sont des normes de l'*erreur exacte*, mesurant l'écart entre la solution éléments finis u_h et la solution exacte u_{exa} . Dans les cas pratiques, la solution exacte n'est pas connue et on doit plutôt *estimer* l'erreur en remplaçant u_{exa} par la solution reconstruite u^* de la section précédente, ou ∇u_{exa} par ∇u^* , le cas échéant. On obtient alors l'*erreur estimée*. Une autre quantité d'intérêt est l'*erreur de reconstruction*. On fait alors la différence entre la solution exacte u_{exa} et la solution reconstruite u^* , ce qui permet de quantifier la précision de la reconstruction de la solution. Finalement, on retient que pour une norme quelconque d'erreur (norme H^1 , norme L_2 ...), on peut évaluer trois quantités ici résumées :

$$\text{L'erreur exacte} \quad \|u_{\text{exa}} - u_h\| \quad (2.17a)$$

$$\text{L'erreur estimée} \quad \|u^* - u_h\| \quad (2.17b)$$

$$\text{L'erreur de reconstruction} \quad \|u_{\text{exa}} - u^*\| \quad (2.17c)$$

Ces normes d'erreur nous permettent de définir l'indice d'efficacité :

$$\theta = \frac{\|u^* - u_h\|}{\|u_{\text{exa}} - u_h\|} \quad (2.18)$$

soit le rapport entre les erreurs estimée et exacte. Si le rapport est unitaire, alors l'estimateur d'erreur donne effectivement l'erreur exacte. Ceci est optimal pour le processus d'adaptation de maillage *a posteriori*.

Théorème 2.1. L'indice d'efficacité tend vers 1 si l'erreur de reconstruction converge à un ordre plus élevé que celui de l'erreur exacte.

Hypothèse 1. Soient l'erreur exacte et l'erreur de reconstruction

$$\|u_{\text{exa}} - u_h\| = \mathcal{O}(h^p) \quad (2.19a)$$

$$\|u_{\text{exa}} - u^*\| = \mathcal{O}(h^{p+\alpha}) \quad (2.19b)$$

Avec $\alpha > 0$, c'est-à-dire que l'erreur de reconstruction converge à un ordre plus élevé que l'erreur exacte.

Preuve. On réécrit l'estimateur d'erreur :

$$\|u^* - u_h\| = \|(u_{\text{exa}} - u_h) - (u_{\text{exa}} - u^*)\|$$

L'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$\|u^* - u_h\| \leq \|u_{\text{exa}} - u^*\| + \|u_{\text{exa}} - u_h\| \quad (2.20)$$

L'inégalité triangulaire *inverse* [11, 12] permet d'écrire

$$\|u^* - u_h\| \geq \left| \|u_{\text{exa}} - u_h\| - \|u_{\text{exa}} - u^*\| \right| \quad (2.21)$$

D'après l'hypothèse 1, l'erreur de reconstruction est asymptotiquement plus petite que l'erreur exacte, donc

$$\begin{aligned} \|u_{\text{exa}} - u_h\| - \|u_{\text{exa}} - u^*\| &\geq 0 \\ \|u_{\text{exa}} - u_h\| - \|u_{\text{exa}} - u^*\| &= \left| \|u_{\text{exa}} - u_h\| - \|u_{\text{exa}} - u^*\| \right| \end{aligned} \quad (2.22)$$

En combinant (2.20)–(2.22), on obtient l’inégalité de Zhu-Zienkiewicz [9] :

$$\begin{aligned} \|u_{\text{exa}} - u_h\| - \|u_{\text{exa}} - u^*\| &\leq \|u^* - u_h\| \leq \|u_{\text{exa}} - u^*\| + \|u_{\text{exa}} - u_h\| \\ 1 - \frac{\|u_{\text{exa}} - u^*\|}{\|u_{\text{exa}} - u_h\|} &\leq \theta \leq 1 + \frac{\|u_{\text{exa}} - u^*\|}{\|u_{\text{exa}} - u_h\|} \end{aligned}$$

En substituant (2.19), on borne l’indice d’efficacité par

$$1 - \mathcal{O}(h^\alpha) \leq \theta \leq 1 + \mathcal{O}(h^\alpha)$$

Si $\alpha > 0$, alors $\theta \rightarrow 1$.

Donc, si l’ordre de convergence de l’erreur de reconstruction est supérieur à celui de l’erreur exacte ($\alpha > 0$), l’indice d’efficacité de l’estimateur d’erreur tend vers 1. ■

Ainsi, il est avantageux de reconstruire la solution le plus précisément possible, afin d’assurer que l’estimateur soit asymptotiquement exact. Si l’erreur de reconstruction converge au même taux que l’erreur exacte ($\alpha = 0$), alors l’indice d’efficacité est borné d’après Zhu et Zienkiewicz par une constante de part et d’autre de l’unité. Par exemple, on peut retrouver $0.7 \leq \theta \leq 1.3$. Ceci n’est pas nécessairement nuisible à l’adaptation de maillage puisque l’estimateur d’erreur peut tout de même déterminer les régions où l’erreur est grande, où le maillage doit être raffiné.

L’estimation d’erreur se fait sur une base élémentaire. On obtient l’*erreur élémentaire* $\|e_i\|$ en intégrant l’erreur sur l’élément Ω_i . On obtient l’*erreur globale* en sommant les carrés des erreurs élémentaires :

$$\|e_{\text{globale}}\|^2 = \sum_{i=1}^N \|e_i\|^2$$

Ceci représente le niveau d’erreur de la solution ; il s’agit de la quantité que l’on veut réduire grâce au processus de remaillage adaptatif.

2.4.3 Stratégie de remaillage

La troisième étape du processus d’adaptation consiste à prescrire la taille des éléments du prochain maillage en fonction de l’erreur. Nous utilisons la stratégie de réduction d’erreur décrite par Zhu et Zienkiewicz [13], qui consiste à réduire l’erreur par un facteur $\zeta < 1$ à chaque itération du processus adaptatif, c’est-à-dire

$$\|e_{\text{cible}}\|^2 = \zeta^2 \|e_{\text{globale}}\|^2$$

Ainsi, chaque remaillage entraîne une réduction de l'erreur. On souhaite également que l'erreur soit équidistribuée sur le domaine, c'est-à-dire pour N éléments :

$$\|e_{\text{cible}}\|_{\Omega}^2 = N \|e_{\text{cible},i}\|_{\Omega_e}^2$$

Donc, l'erreur cible sur un élément est donnée par

$$\|e_{\text{cible},i}\| = \frac{\zeta \|e_{\text{globale}}\|}{\sqrt{N}} \quad (2.23)$$

On s'attend à ce que l'erreur converge à l'ordre p ; on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \|e_{i,\text{new}}\| &= \mathcal{O}(h_{i,\text{new}}^p) = ch_{i,\text{new}}^p \\ \|e_{i,\text{old}}\| &= \mathcal{O}(h_{i,\text{old}}^p) = ch_{i,\text{old}}^p \end{aligned}$$

En divisant, on fait apparaître le ratio de taille de maille

$$\begin{aligned} \frac{\|e_{\text{cible},i}\|}{\|e_{i,\text{old}}\|} &= \frac{\zeta \|e_{\text{globale}}\|}{\sqrt{N}} \frac{1}{\|e_{i,\text{old}}\|} \\ \frac{ch_{i,\text{new}}^p}{ch_{i,\text{old}}^p} &= \frac{\zeta \|e_{\text{globale}}\|}{\sqrt{N}} \frac{1}{\|e_{i,\text{old}}\|} \end{aligned}$$

Ainsi, la nouvelle taille de maille s'obtient pour l'élément i :

$$\delta_i = h_{i,\text{new}} = \left(\frac{\zeta}{\sqrt{N}} \frac{\|e_{\text{globale}}\|}{\|e_i\|} \right)^{\frac{1}{p}} h_{i,\text{old}} \quad (2.24)$$

On obtient la taille prescrite pour le prochain maillage en bouclant sur les éléments. Ce calcul est répété pour chaque variable. Pour s'assurer de réduire l'erreur pour toutes les variables, on prend le minimum de taille de maille calculée pour chacune :

$$\delta_i = \min(\delta_u, \delta_k, \delta_\epsilon) \quad (2.25)$$

Ceci consiste à adapter simultanément sur toutes les variables. Notons que l'équation (2.25) empêche l'équidistribution d'erreur. En effet, on pourra par exemple imposer une taille d'élément plus petite que nécessaire pour l'équidistribution de l'erreur sur u , en raison de la réduction d'erreur sur k .

La taille prescrite δ_i du nouveau maillage est constante par élément, mais discontinue d'un élément à l'autre. Pour faciliter la génération du maillage, la taille continue $\delta(y)$ est interpolée

en passant par les minima aux interfaces de δ_i . Nous avons fait ce choix, car il semble plus conservateur que d'autres. En effet, on garantit ainsi que la taille interpolée ne soit jamais plus grande que la taille prescrite. En conséquence, la taille réelle des éléments générés sera plus petite que ce qu'on calcule avec (2.25). Les autres choix semblent moins idéaux en ce sens ; passer par les minima garantirait que les éléments soient plus gros, et passer par une valeur moyenne pose problème aux bords.

Afin d'illustrer l'interpolation, la figure 2.5 illustre la taille de maille près de la paroi pour un écoulement de Couette dans un domaine unitaire. Le maillage initial (trait plein) provient d'une distribution arbitraire permettant de concentrer les nœuds près des bords du domaine. Sur ce maillage, la taille prescrite du nouveau maillage (tiret-point) est calculée suivant (2.24)–(2.25). Tel que mentionné précédemment, la taille prescrite est discontinue. On l'interpole ensuite en passant par les minima aux interfaces (tirets).

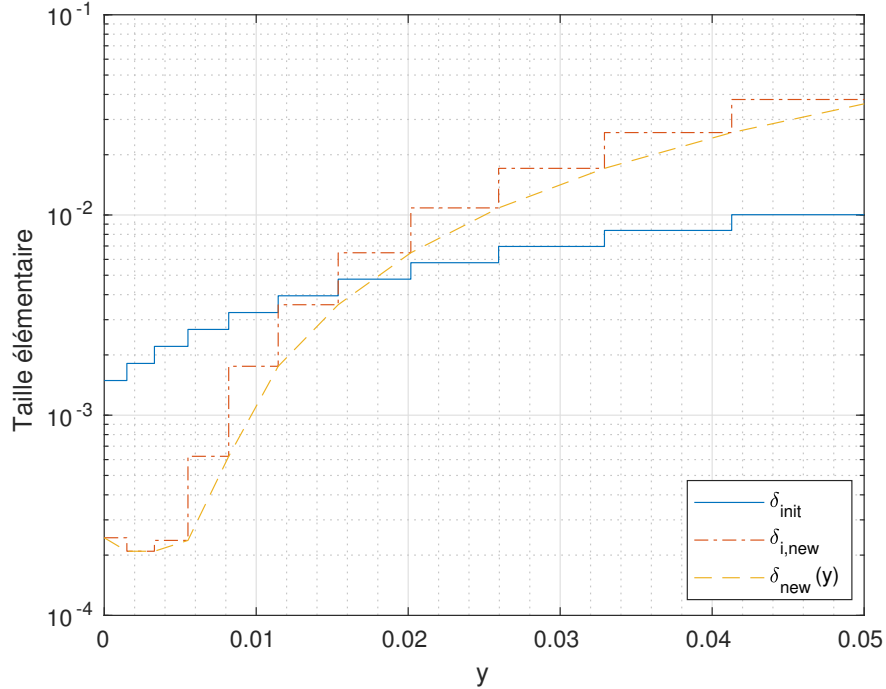


Figure 2.5 Taille de maille dans la couche limite ; maillage original (trait plein), taille prescrite par élément (tiret-point) et interpolée (tirets)

Comme on peut le constater, l'adaptation de maillage peut prescrire des éléments de taille plus petite ou plus grande que celles du maillage original. Le nouveau maillage peut localement être beaucoup plus fin que le maillage initial sans pour autant compter un nombre excessif d'éléments et sans occasionner de raideur numérique importante. Dans certains cas,

dépendamment du maillage de départ, le premier cycle de remaillage adaptatif peut simultanément réduire l'erreur et le nombre d'éléments, ce qui est particulièrement intéressant.

2.4.4 Génération de maillage adaptatif

La quatrième et dernière étape du processus d'adaptation de maillage consiste à générer un maillage adaptatif, qui servira ensuite à calculer plus précisément la solution.

La génération de maillage vise à respecter le plus possible la contrainte $h_{\text{elm}} = \delta(y)$, c'est-à-dire que la taille des éléments générés h_{elm} devrait être aussi proche que possible de la taille prescrite (interpolée) $\delta(y)$. En d'autres mots, on souhaite générer des éléments dont la taille est exactement la taille prescrite. Il faut donc utiliser une procédure de génération de maillage robuste, qui permet de respecter cette contrainte. La procédure de remaillage retenue est celle décrite dans Peraire *et al.* [14]. Il s'agit originalement d'une procédure décrite pour le maillage des arêtes d'un domaine 3D. Son application en 1D est facile, puisque l'on peut s'affranchir de la transformation de coordonnées nécessaire pour mailler une ligne courbe dans l'espace.

D'emblée, le nombre total d'éléments requis est calculé en intégrant l'inverse de la taille de maille le long de la courbe :

$$A_s = \int_0^L \frac{1}{\delta} dy \quad (2.26)$$

Le nombre résultant, A_s , n'est généralement pas un entier. Comme le domaine doit comporter un nombre entier d'éléments, on utilise N_s , l'entier le plus proche de A_s . Cette opération définit un facteur d'étirement N_s/A_s qui permet de distribuer l'erreur $|N_s - A_s|$ sur tous les éléments. Les nœuds délimitant les éléments sont placés aux points y_i tels que l'intégrale

$$I = \frac{N_s}{A_s} \int_0^{y_i} \frac{1}{\delta} dy \quad (2.27)$$

prenne des valeurs entières. L'intégrale (2.27) peut être vue comme un compteur du nombre d'éléments : I augmente de 0 à N_s avec la borne d'intégration. Naturellement, on veut placer les limites des éléments là où leur nombre est entier.

En pratique, l'implémentation est faite en déplaçant les deux bornes de l'intégrale :

$$1 = \frac{N_s}{A_s} \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{1}{\delta} dy \quad (2.28)$$

On cherche alors y_i tel que l'intégrale soit unitaire et on y place un nœud, en progressant ainsi jusqu'à la limite du domaine.

CHAPITRE 3 MODÉLISATION DE LA TURBULENCE

Même en se limitant à la famille des modèles k - ϵ , il existe une multitude de modèles ayant chacun ses particularités. Ce chapitre présente une discussion des modèles de turbulence reliés au projet de recherche ainsi que la sélection d'un modèle pour le reste des travaux. On présente brièvement le modèle k - ϵ standard puis des variantes à bas Reynolds. Ensuite, on s'attarde au modèle de Launder-Sharma et à sa formulation pour l'implémentation en éléments finis.

3.1 Modèle k - ϵ standard

La forme dite *standard* du modèle k - ϵ standard prend les équations de Jones-Launder [15] avec les constantes de Launder-Sharma [16].

Le système d'équations pour k et ϵ s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \epsilon \\ \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) + c_1 \frac{\epsilon}{k} P_k - c_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \end{array} \right. \quad (3.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \epsilon \\ \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) + c_1 \frac{\epsilon}{k} P_k - c_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \end{array} \right. \quad (3.1b)$$

Avec la production d'énergie cinétique et la viscosité turbulente respectivement données par,

$$P_k = \mu_t (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top) : \nabla \mathbf{u} \quad (3.2)$$

$$\mu_t = \rho c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.3)$$

Les constantes prennent les valeurs du tableau 3.1.

Tableau 3.1 Constantes du modèle k - ϵ standard

c_μ	c_1	c_2	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Le modèle k - ϵ n'est pas asymptotiquement consistant, c'est à dire qu'il ne reproduit pas le comportement asymptotique des variables en proche paroi. Pour cette raison, on ne peut pas l'intégrer jusqu'à la paroi, faute de quoi la solution résultante serait invalide. Un traitement

particulier *doit* être fait au parois : l'utilisation de lois de paroi. La modélisation des parois est traitée au chapitre 4.

3.2 Modèle $k-\epsilon$ à bas-Reynolds

Les modèles à bas-Reynolds ajoutent au modèle standard des fonctions d'amortissement et des termes source supplémentaires dans les équations de k et ϵ , rendant le modèle valide près des parois. Cette approche se veut plus complète que la modélisation de l'écoulement limitée à la région externe ou éloignée des parois. En effet, la région de proche paroi est alors pleinement résolue plutôt qu'être modélisée algébriquement. En contrepartie, le coût de modélisation est beaucoup plus grand et les modèles sont généralement plus difficiles à mettre en œuvre et en application.

De manière générale, les versions « bas-Reynolds » du modèle $k-\epsilon$ s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \epsilon \\ \rho \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\epsilon} = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \tilde{\epsilon} \right) + c_1 f_1 \frac{\tilde{\epsilon}}{k} P_k - c_2 f_2 \rho \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} + E \end{array} \right. \quad (3.4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \epsilon \\ \rho \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\epsilon} = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \tilde{\epsilon} \right) + c_1 f_1 \frac{\tilde{\epsilon}}{k} P_k - c_2 f_2 \rho \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} + E \end{array} \right. \quad (3.4b)$$

avec une variable de dissipation transformée, telle que,

$$\begin{aligned} \epsilon &= \tilde{\epsilon} + D \\ \mu_t &= \rho c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\epsilon}} \end{aligned}$$

Les fonctions d'amortissement (f_μ , f_1 , f_2), les termes supplémentaires D et E ainsi que les différentes constantes sont propres à chaque modèle.

Le terme D peut également être vu simplement comme un terme source supplémentaire à l'équation de k . Dans ce cas, l'on écrit l'équation de k avec la variable transformée, gardant comme terme source

$$-\rho \epsilon = -\rho \tilde{\epsilon} - \rho D$$

En pratique, c'est ainsi que l'équation est modélisée. Puisque la variable ϵ non transformée n'apparaît plus nulle part, on se permet alors de retirer le tilde pour simplifier la notation. Dans le reste du document, on omet la notation de tilde sur ϵ . Ainsi, lorsqu'il est question de ϵ pour les modèles bas-Reynolds, on doit comprendre qu'il s'agit plutôt de sa transformée $\tilde{\epsilon}$.

3.2.1 Sélection d'un modèle bas-Reynolds

Une revue de différents modèles à bas-Reynolds est présentée par Patel *et al.* dans [17]. Parmi ceux présentés, les modèles de Chien [18], Lam-Bremhorst [19] et Launder-Sharma [16] sont jugés les plus prometteurs. Cependant, tous les modèles présentent des particularités rendant leur implémentation ou utilisation difficile.

3.2.1.1 Modèle de Chien

Le modèle de Chien se comporte bien dans la plupart des cas. Cependant, sa fonction f_μ fait intervenir la distance à la paroi :

$$f_\mu = 1 - e^{-0.0015y^+} \quad (3.5)$$

où y^+ est la distance adimensionnelle à la paroi la plus proche, définie à la section 4.1. À titre indicatif, on l'écrit $y^+ = d \frac{u_\tau}{\nu}$, avec u_τ la vitesse de friction, laquelle dépend du cisaillement pariétal τ_w . La formulation (3.5) est doublement problématique. Le premier problème est qu'elle demande de déterminer la distance à la paroi la plus proche, ce qui est trivial pour un écoulement de couche limite 1D, mais se généralise mal à une géométrie complexe à plus d'une dimension. Ce problème est toutefois pallié par Lacombe qui propose une méthode efficace de calcul de la distance à la paroi [2].

Le second et principal problème concerne plutôt l'adimensionnalisation de la distance. Bien que la distance d à la paroi la plus proche soit continue dans tout le domaine, la distance adimensionnelle y^+ est généralement discontinue, puisqu'elle se base sur des propriétés non-locales. Afin d'illustrer, considérons un écoulement dans un canal plan unitaire, tel qu'illustré à la figure 3.1. Supposons que le cisaillement soit différent aux parois supérieure et inférieure : $\tau_{w,\text{sup}} \neq \tau_{w,\text{inf}}$, ce qui peut être justifié par différentes raisons comme un changement de géométrie en amont ou une différence de rugosité entre les parois. Dans la moitié inférieure de l'écoulement ($y < 0.5$), y^+ est adimensionnalisé par $\tau_{w,\text{inf}}$ et inversement pour la moitié supérieure ($y > 0.5$). À égale distance des deux parois ($y = 0.5$), deux valeurs différentes de y^+ se calculent, dépendamment de quelle valeur de τ_w on retient. Comme les valeurs du cisaillement sont différentes aux deux parois, y^+ est discontinu au centre.

Ce comportement est mis en évidence à la figure 3.2. On y voit en (a) que la distance d est multipliée par un facteur différent de part et d'autre de la ligne de centre, ce qui donne une discontinuité au centre. En (b), la fonction d'amortissement f_μ , dépendant de y^+ , affiche également une discontinuité au centre de la conduite. C'est la discontinuité de f_μ qui pose problème au niveau de la résolution du modèle : un trop grand saut dans la fonction

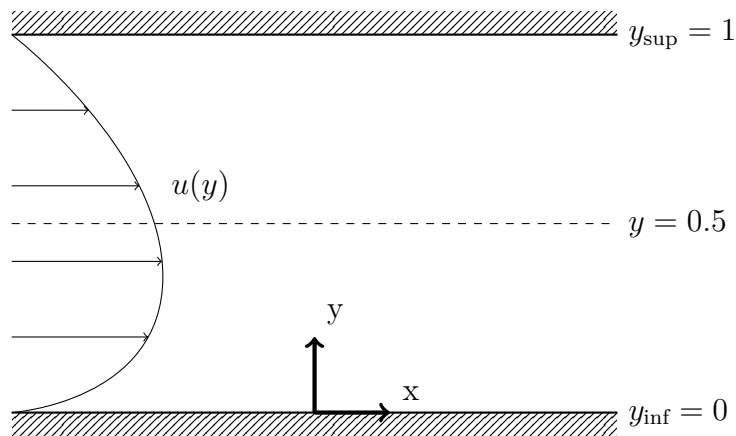
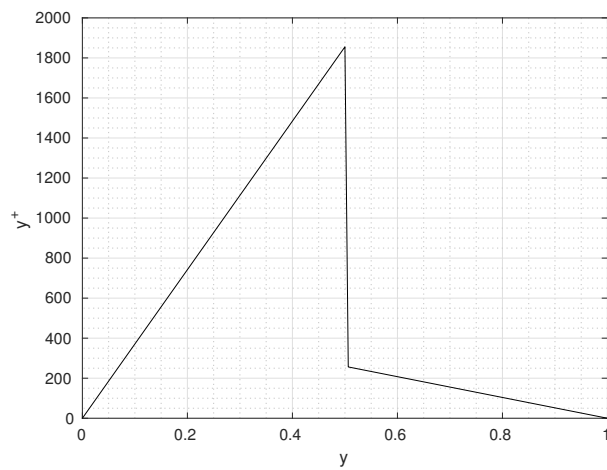
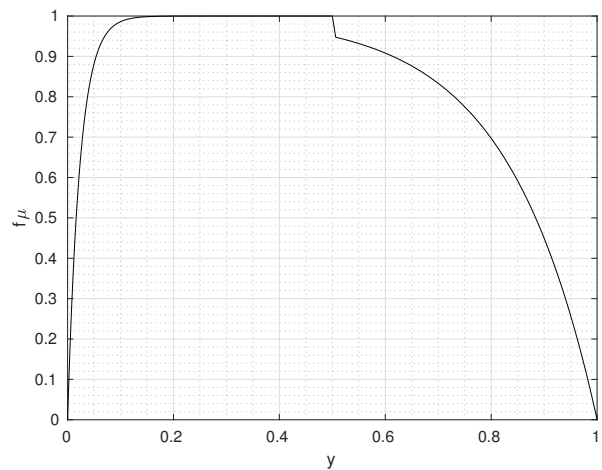


Figure 3.1 Écoulement asymétrique dans un canal plan



(a) Distance adimensionnelle



(b) Fonction d'amortissement

Figure 3.2 Discontinuité du modèle de Chien

d'amortissement entraîne une brusque variation de la viscosité turbulente, ce qui empêche la convergence du calcul.

L'adimensionnalisation par le cisaillement pose également problème près des points de stagnation, où le cisaillement est nul, donc $u_\tau = 0$. On retrouve alors $y^+ \sim 0$ donc $f_\mu \sim 0$, et ce *indépendamment de la distance à la paroi d* . En d'autres mots, la distance adimensionnelle peut être très petite même loin de la paroi, ce qui s'avère aberrant.

Le modèle de Chien présente également une particularité au niveau de la discrétisation, soit que la solution sur chaque élément du domaine dépend implicitement des valeurs au bord, en raison de la formulation de la fonction d'amortissement (3.5). Plus spécifiquement, la solution en tout point dépend *directement* de la condition limite (cisaillement) à la paroi la plus proche.

La figure 3.3 illustre la structure matricielle usuelle et celle résultante de cette dépendance aux conditions limites. En (a), la structure de bande diagonale d'un modèle « type » n'impliquant pas de terme source en y^+ est mise en évidence. Afin de clarifier, les termes extradiagonaux visibles réfèrent aux multiplicateurs de Lagrange imposant les conditions limites aux parois supérieure et inférieure (voir section 2.3.3). Comme on le constate, seuls le premier et le dernier élément en dépendent. En (b), une colonne pleine apparaît pour le modèle de Chien, illustrant la dépendance de *tous* les éléments au cisaillement à la paroi, via la fonction d'amortissement f_μ . Ces colonnes détruisent la structure matricielle de type *bande* normalement attendue. Notons aussi la présence d'un élément chevauchant le centre du domaine, qui dépend donc des conditions limites aux deux parois.

Sans un traitement spécial des termes extradiagonaux, l'efficacité du solveur est réduite. En effet, omettre ces termes limite la convergence itérative de la méthode de Newton. En contrepartie, les inclure affecte le stockage des coefficients et pose des défis à l'implémentation. Au niveau du stockage, le choix de format de matrice dans CL1D est entre « matrice bande » et « matrice pleine ». Dans ce dernier cas, inclure les termes extradiagonaux oblige à stocker tous les coefficients de la matrice, dont la grande majorité sont nuls, ce qui s'avère coûteux. D'autres programmes, dont CODYF, incluent des formats plus généraux de matrice creuses, éliminant ce problème. En ce qui concerne l'implémentation, l'inclusion des termes de bord impose de s'assurer que les éléments de bord soient assemblés à la matrice élémentaire. En 1D, il est simple de déterminer quel élément de bord inclure, mais cette tâche est difficile en 2D puisqu'elle demande d'associer un élément de bord à chaque élément du domaine. Il n'est pas suffisant de connaître seulement la distance à la paroi la plus proche, il faut également savoir quels éléments s'y trouvent.

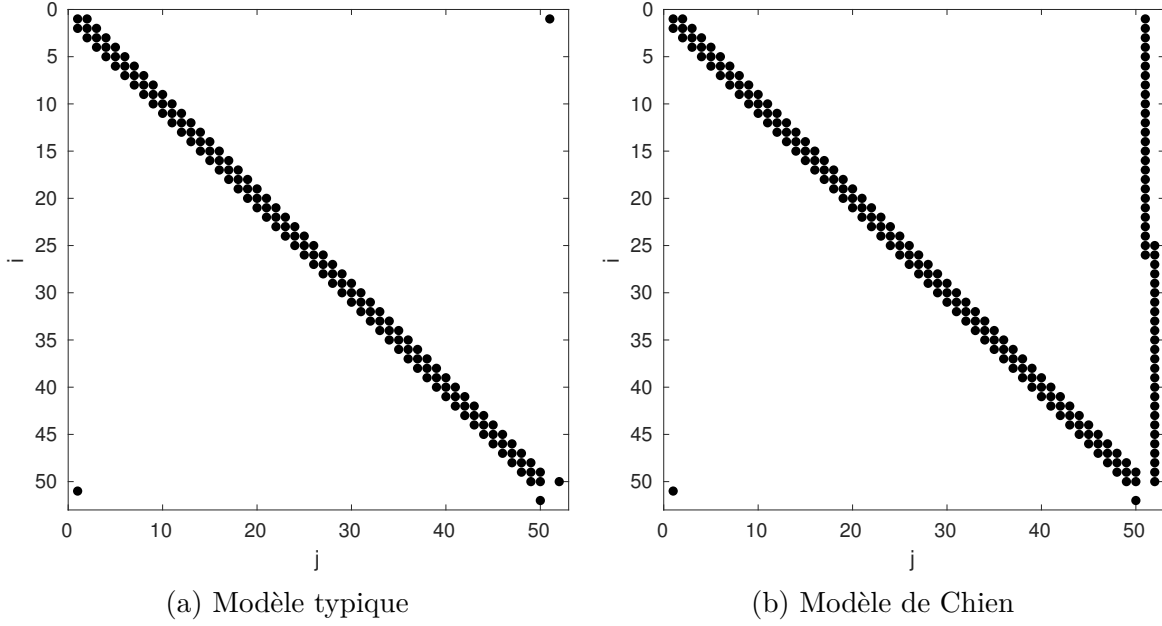


Figure 3.3 Structure matricielle de la résolution du modèle $k-\epsilon$ (les points représentent les entrées non-nulles dans la matrice)

3.2.1.2 Modèle de Lam-Bremhorst

Le modèle de Lam-Bremhorst présente également deux difficultés. La première est la condition limite sur ϵ , qui dépend de la dérivée seconde de k , laquelle est difficile à évaluer. Or, cette difficulté est escamotée par Patel *et al.* [17] par l'imposition d'une condition de Neumann homogène. D'après les auteurs, ce changement facilite le calcul numérique et donne des résultats presque identiques.

La principale difficulté du modèle provient plutôt des fonctions d'amortissement. Le modèle emploie comme fonctions :

$$f_\mu = (1 - \exp(-0.0165 R_y))^2 \left(1 + \frac{20.5}{R_t}\right) \quad \text{et} \quad f_1 = 1 + \left(\frac{0.05}{f_\mu}\right)^3$$

Avec les nombres de Reynolds turbulents donnés par

$$R_t = \frac{\rho k^2}{\mu \epsilon} \quad \text{et} \quad R_y = \frac{\sqrt{k} \rho y}{\mu}$$

La difficulté survient lorsque l'on s'approche de la paroi ($y \rightarrow 0$), donc que k et ϵ tendent vers 0. Alors, les nombres R_t et R_y tendent également vers 0. Le comportement des fonctions d'amortissement est alors singulier.

La fonction f_μ peut être vue comme une fonction de deux variables. Lorsque l'on prend la limite lorsque les deux tendent vers 0, f_μ prend une forme indéterminée $0 \times \infty$. Bien que l'on puisse montrer que cette limite vaut 0 en suivant les comportements asymptotiques des variables, il faut noter que lors des itérations les variables ne tendent pas nécessairement vers 0 d'après leur comportement asymptotique attendu — ce n'est que sur la solution convergée qu'il est attendu. En pratique, dépendamment des taux selon lesquels tendent k et ϵ vers 0 lors des itérations, f_μ peut tendre vers 0 ou ∞ . Par extension, la fonction f_1 également est affectée.

En pratique, lors des essais avec ce modèle, ces fonctions se comportent bien sur des maillages assez grossiers. C'est lorsque le premier élément se trouve pleinement dans $y^+ < 1$ que les fonctions commencent à manifester un comportement singulier. Or, dans l'optique de faire de l'adaptation de maillage, il faut s'attendre à avoir une très grande résolution près de $y^+ = 1$. Comme nos essais montrent que ce modèle présente des difficultés majeures dans cette région, il est écarté.

3.2.1.3 Modèle de Launder-Sharma

Le modèle de Launder-Sharma, plutôt que d'employer la distance à la paroi, utilise un nombre de Reynolds turbulent local. Cette approche élimine les défauts soulignés ci-dessus pour le modèle de Chien. Ses fonctions d'amortissement ont également un comportement plus robuste que celles du modèle de Lam-Bremhorst.

Toutefois, le prix est payer est l'introduction dans l'équation de ϵ d'un terme source, exprimé en 1D comme :

$$E = 2 \frac{\mu \mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \quad (3.6)$$

D'une part, l'expression (3.6) est applicable uniquement pour des écoulements de couche limite 1D. Il n'est pas du tout clair comment ce terme se généralise à 2 ou 3 dimensions. On discute de sa définition généralisée en 3.3.1.2.

D'autre part, ce terme est difficile à modéliser correctement par la méthode des éléments finis. En effet, tel que vu en 2.3, dans la méthode des éléments finis, on traite normalement les dérivées secondes en les intégrant par parties. Or, le carré dans l'équation (3.6) nous empêche de traiter ce terme de la manière usuelle. Le traitement particulier de ce terme est explicité en 3.3.2.

En outre, notons qu'une implémentation du modèle de Launder-Sharma a déjà été faite dans CADIYF [1] et CL1D, quoique le terme E est traité directement, donc sans relèvement ni

intégration par parties de la dérivée seconde. L'absence de distance à la paroi s'est avéré la principale motivation dans le passé pour implémenter ce modèle dans CADIYF.

En fin de compte, on retient le modèle de Launder-Sharma. Une raison principale pour ce choix est son implémentation existante. D'une part, elle simplifie les travaux. D'autre part, elle est à revoir ; dans CL1D, le modèle est particulièrement fragile. En effet, nous avons montré dans [20] deux faiblesses de la forme 1D du modèle. Premièrement, elle peut converger jusqu'à précision machine sans difficulté sur un maillage donné puis diverger si on y ajoute un seul élément. Deuxièmement, l'erreur sur la solution ne diminue pas en raffinant le maillage ! Notons que ces essais n'ont pas été faits pour CADIYF. Finalement, CL1D utilisait des différences finies pour évaluer les dérivées secondes sur des éléments linéaires, ce qui est erroné. Le traitement de ce terme source doit être revu, justifiant de revisiter le modèle de Launder-Sharma.

3.3 Modèle $k-\epsilon$ de Launder-Sharma

Le modèle de Launder-Sharma prend la forme générale (3.4), avec les fonctions d'amortissement et termes source bas-Reynolds donnés ci-dessous. Spécifiquement, on écrit,

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \epsilon - 2\mu \left| \nabla \sqrt{k} \right|^2 & (3.7a) \\ \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) + c_1 f_1 \frac{\epsilon}{k} P_k - c_2 f_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} + E & (3.7b) \end{cases}$$

Avec comme précédemment

$$P_k = \mu_t \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top \right) : \nabla \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \mu_t = \rho c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

Les constantes prennent les valeurs du tableau 3.1, et les fonctions d'amortissement sont définies :

$$R_t = \frac{\rho k^2}{\mu \epsilon} \quad f_\mu = \exp \left(\frac{-3.4}{\left(1 + \frac{50}{R_t} \right)^2} \right) \quad f_1 = 1 \quad f_2 = 1 - 0.3e^{-R_t^2}$$

La définition du terme E est explorée ci-dessous.

Notons que le modèle implémenté dans les solveurs n'est pas le système (3.7), pour les raisons élaborées ci-dessous. La version servant au calcul est plutôt la reformulation (3.21) présentée à la section 3.4.

3.3.1 Expression des termes source

Cette sous-section présente une réécriture des termes source afin de permettre la modélisation dans les logiciels d'éléments finis utilisés. On cherche à réécrire le terme source D pour faciliter l'implémentation, puis on tente de définir E de manière univoque et utile.

3.3.1.1 Expression du terme source d'énergie cinétique

Le terme D dans l'équation de k est défini en utilisant le gradient de la racine carrée de l'énergie cinétique :

$$D = 2\mu \left| \nabla \sqrt{k} \right|^2 = 2\mu \left(\nabla \sqrt{k} \right) \cdot \left(\nabla \sqrt{k} \right) \quad (3.8)$$

Ce terme est légèrement problématique puisque l'on n'a pas directement accès à la dérivée de \sqrt{k} . On peut toutefois contourner ce problème en appliquant simplement la règle de dérivation en chaîne :

$$2\mu \left| \nabla \sqrt{k} \right|^2 = \frac{\mu}{2k} |\nabla k|^2 \quad (3.9)$$

Il en résulte une expression dépendant uniquement de k . On constate l'apparition d'une non-linéarité supplémentaire dans la division par k . On suppose toutefois que ce terme ne pose pas davantage de problème en soi puisque l'on divise déjà par k dans d'autres termes des équations.

3.3.1.2 Définition du terme source de dissipation

En 1D, la définition du terme source E est claire. Le modèle de Jones et Launder [15], sur lequel Launder et Sharma se basent, écrit le terme source en employant la dérivée seconde de u : $(\partial^2 u / \partial y^2)^2$. Nous écrivons la forme 1D du modèle à l'aide de cette définition.

On souhaite toutefois écrire ce terme source en plus d'une dimension. On comprend effectivement que ce terme doit intervenir indépendamment de l'orientation des parois solides, donc inclure des dérivées dans d'autres directions que seule y .

Il est d'usage de se référer à l'article de Launder et Sharma [16] pour définir le modèle. Malheureusement, l'écriture du modèle de Launder-Sharma est donnée en coordonnées cylindriques. Ils écrivent

$$E = 2 \frac{\mu \mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)^2 \quad (3.10)$$

Leur écriture n'est pas invariante, ainsi il est difficile de voir comment la généraliser à d'autres systèmes de coordonnées. On se tourne alors vers une publication de Launder et Spaling [21], où le terme en question est écrit sous la forme

$$E = 2 \frac{\mu \mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2$$

Cette forme a l'avantage d'impliquer toutes les dimensions, mais demeure néanmoins ambiguë. En effet, il est conventionnel d'interpréter une expression avec des indices répétés comme une somme sur ces indices, mais ici ils ne sont pas répétés. En « développant » le carré, on obtient une interprétation univoque en coordonnées cartésiennes :

$$E \frac{\rho}{2\mu\mu_t} = \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) \quad (3.11)$$

Il devient alors possible de sommer sur les indices répétés. En 3D, ce terme source est donc une somme des 9 dérivées secondes des 3 composantes de vitesse, totalisant 27 termes. En utilisant la symétrie, on réduit à 6 dérivées secondes par composante, donc 18 termes.

En 2D, on retrouve 6 termes :

$$E \frac{\rho}{2\mu\mu_t} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial y} \right)^2$$

Et on peut réduire le nombre de termes jusqu'à 4, en utilisant l'équation de continuité pour un écoulement incompressible ($\partial u / \partial x = -\partial v / \partial y$),

$$E \frac{\rho}{2\mu\mu_t} = 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 \quad (3.12)$$

Même si la formulation (3.11) est claire en coordonnées cartésiennes, il n'est pas clair comment elle se généraliserait à d'autres systèmes de coordonnées, comme en axisymétrique. Ainsi, on ne peut pas vérifier simplement comment cette écriture et celle de [16] s'équivalent.

Puisque le modèle tel que formulé se montre ambigu, plusieurs auteurs qui utilisent le modèle de Launder-Sharma proposent leur propre interprétation ou généralisation du terme E pour y faire apparaître les dérivées dans les autres directions. Les formulations recensées sont écrites au tableau 3.2. En 1D, la plupart de ces expressions se réduisent à la forme usuelle $E \sim (\partial^2 u / \partial y^2)^2$. Notons toutefois qu'aucune d'entre elles ne permet d'obtenir l'équation (3.12).

Tableau 3.2 Expressions en 2D du terme en dérivée seconde du modèle Launder-Sharma

E	Références
$2\frac{\mu\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2$	[1]
$2\frac{\mu\mu_t}{\rho} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right)$	[22, 23]
$2\frac{\mu\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2$	[24]
$2\frac{\mu\mu_t}{\rho} \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 \right)$	[25, 26]

L'expression retenue pour cette maîtrise est celle de Mortensen *et al.* [25]. De manière générale, elle est écrite en fonction du Laplacien de \mathbf{u} :

$$E = 2\frac{\mu\mu_t}{\rho} |\nabla^2 \mathbf{u}|^2 \quad (3.13)$$

Leur justification est que cette généralisation demeure fidèle à l'esprit du modèle, puisque ce terme ne devrait s'activer que près des parois solides. Un avantage de leur modèle est qu'il est indépendant du système de coordonnées, contrairement à la forme (3.11) qui n'est valide qu'en coordonnées cartésiennes. Nous n'avons pas trouvé d'écriture invariante des autres modèles du tableau 3.2.

Retenir la modélisation de Mortensen *et al.* est justifié du fait qu'il s'agit de la formulation qui se prête au plus petit coût au traitement particulier du terme E décrit en 3.3.2. Notons également qu'il s'agit des seuls auteurs parmi ceux recensés qui explicitent la nécessité de traiter ce terme de manière particulière en éléments finis, conférant au modèle une certaine légitimité.

3.3.2 Modélisation du terme E dans les solveurs éléments finis

Tel que vu en 2.3, il faut appliquer pour la méthode des éléments finis un traitement particulier aux dérivées secondes. Puisque le terme E ne peut pas être intégré par parties, nous proposons un relèvement de la dérivée. Cette approche nous permet alors de traiter la dérivée seconde d'une manière compatible avec la méthode des éléments finis. On décrit ci-dessous l'approche employée pour chacun des solveurs.

Remarque Dans les deux cas, la nouvelle variable introduite possède la particularité qu’il serait erroné d’adapter le maillage à son erreur en norme H^1 . Il faut donc faire attention de ne pas adapter pour l’erreur sur la variable de relèvement. Concrètement, on retire cette variable de l’équation (2.25). Si on veut adapter en fonction de cette variable, la norme L_2 semble appropriée. Or, les brefs essais faits dans cette optique sont non concluants.

3.3.2.1 Traitement du terme de dérivée seconde dans CL1D

Le solveur CL1D introduit un relèvement de la dérivée de u . Plus spécifiquement, nous introduisons une variable définissant la projection de la dérivée de u ,

$$w = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.14)$$

On ajoute la forme faible de cette équation au système d’équations différentielles $u-k-\epsilon$ et on la résout par la méthode des éléments finis.

Pour l’évaluation du terme E , on considère simplement la dérivée de w , laquelle est bien définie :

$$E = 2 \frac{\mu \mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (3.15)$$

Ce choix de projection s’est imposé comme le plus naturel. Il s’avère légèrement différent de ce qui est fait dans CADYF puisqu’il le précède chronologiquement.

3.3.2.2 Traitement du terme de dérivée seconde dans CADYF

Pour le solveur 1D, nous avons projeté la dérivée de u directement. Une généralisation de cette approche en 2D est toutefois mal avisée. En effet, d’après l’équation (3.12), il faudrait au minimum faire 4 projections (ce qui doublerait presque la taille du système d’équations déjà plus gros qu’en 1D, $u-v-p-k-\epsilon$), ce qui s’avère prohibitif. On cherche donc une façon plus simple de traiter le terme source en 2D.

On se penche alors sur la modélisation de Mortensen *et al.* [25]. Leur approche consiste à ajouter au système d’équations à résoudre l’équation du Laplacien de \mathbf{u} , noté \mathbf{L} . Cette équation est alors traitée normalement en intégrant par parties la dérivée seconde :

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot \mathbf{L} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \varphi : \nabla \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \varphi \, d\Gamma \quad (3.16)$$

Or, cette approche introduit des termes de bord pour le Laplacien de \mathbf{u} , ce qui complique la détermination et l'implémentation des conditions limites. Ceci est d'autant plus vrai dans le contexte où les conditions limites sont données par des lois de paroi. Ainsi, une projection du Laplacien ne semble pas particulièrement intéressante.

Plutôt que de projeter le Laplacien, nous nous appuyons sur la définition de $\nabla^2 \mathbf{u}$, et introduisons la *vorticité* comme variable de relèvement, via l'équation (3.17). Cette équation ne fait pas apparaître de terme de bord. Elle n'a pas de condition limite, ainsi la valeur de cette nouvelle variable sera déterminée entièrement par les champs des autres variables.

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.17)$$

Comme en 1D, cette équation supplémentaire s'ajoute au système d'équations différentielles et l'on résout sa forme faible par la méthode des éléments finis. D'ailleurs, le choix de la vorticité comme variable de relèvement présente l'avantage de ne pas nécessiter de projeter chacune des dérivées du champ de vitesse ; il suffit de projeter la vorticité.

On montre ci-dessous que ce choix de projection est consistant avec l'approche de Mortensen *et al.* de modéliser le terme E par un Laplacien, c'est-à-dire que la différence d'ordre sur la dérivée ne change pas la forme de E . En effet, le Laplacien de \mathbf{u} est défini par sa divergence et son rotationnel :

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (3.18)$$

Pour un fluide incompressible ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), il ne reste que la vorticité :

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (3.19)$$

Finalement, l'expression de E en terme de la vorticité est donnée par :

$$E = 2 \frac{\mu \mu_t}{\rho} (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \quad (3.20)$$

Ainsi, la modélisation retenue est largement inspirée de [25], mais implémentée différemment. En projetant la vorticité plutôt que le Laplacien, on s'affranchit de la difficulté de déterminer et implémenter les conditions limites pour cette équation supplémentaire.

Un autre avantage est la compatibilité du relèvement entre les solveurs CL1D et CADYF. En effet, la comparaison des équations (3.14)–(3.15) et (3.17)–(3.20) illustre bien la similitude entre la modélisation en 1D et 2D. En une dimension, on projette la dérivée de u pour évaluer

la dérivée seconde ; en deux dimensions, on projette la vorticité pour évaluer le Laplacien. Dans les deux cas, on a abaissé la dérivée d'un ordre.

Deux différences sont toutefois à noter. D'abord, la formulation 2D fait apparaître des termes supplémentaires dus à la combinaison des dérivées, ce qui est souhaité. Ensuite, on relève une différence de signe. En effet, pour un écoulement 1D, la vorticité est donnée par $-\partial u/\partial y$, à l'opposé du relèvement (3.14). Or, cette différence est sans conséquence, puisque le terme est élevé au carré. Donc, le relèvement de la vorticité permet d'assurer la compatibilité entre les solveurs sans avoir à reprogrammer **CL1D** ; il y a là un avantage au niveau de l'implémentation.

Toutefois, le compromis de ce choix de variable est double. En premier lieu, le modèle se trouve à présent limité au régime incompressible, puisque l'on a exploité le fait que la divergence de \mathbf{u} est nulle pour un écoulement incompressible. En second lieu, le prix à payer est l'introduction d'une équation supplémentaire pour la vorticité. Bien qu'il s'agisse d'une seule équation, elle est vectorielle. Ainsi, en 1D et 2D, il s'agit d'une augmentation d'environ 20% à 33% du nombre de degrés de liberté, mais pour un écoulement tridimensionnel, il faudra projeter et résoudre les trois composantes de la vorticité, ce qui augmente considérablement le coût de calcul. Notons que cette approche est tout de même beaucoup plus économique que de projeter les 18 dérivées secondes en 3D. Heureusement, dans notre cas, nous n'avons qu'à résoudre une seule équation supplémentaire, la composante z de la vorticité.

Puisque le cadre du présent travail est limité aux écoulements 2D incompressibles, le compromis s'avère acceptable.

3.4 Forme reformulée du modèle de Launder-Sharma

Finalem nt, l'introduction du relèvement de la vorticité dans le modèle de Launder-Sharma résulte en un système de 3 équations. Comme précédemment, on a les équations de k et ϵ , mais on doit également résoudre un champ de vorticité.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \epsilon - \frac{\mu}{2k} |\nabla k|^2 \quad (3.21a) \\ \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) + c_1 f_1 \frac{\epsilon}{k} P_k - c_2 f_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} + 2 \frac{\mu \mu_t}{\rho} (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \quad (3.21b) \\ \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.21c) \end{array} \right.$$

Sous la forme (3.21), on peut résoudre le modèle par la méthode des éléments finis, puisqu'on a reformulé les termes problématiques.

Remarque En 2D, le vecteur vorticité n’a qu’une seule composante. En coordonnées cartésiennes, il s’écrit :

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (3.22)$$

Ainsi pour l’implémentation, on traitera ω ainsi que l’équation (3.21c) comme scalaires. On ne fait donc qu’ajouter une équation et une variable supplémentaires au modèle de base (3.7).

3.4.1 Simplification en 1D

En appliquant les simplifications 1D comme pour les équations de continuité et de quantité de mouvement (c.f. section 2.1.3), le système (3.21) se simplifie en 1D :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P_k - \rho \epsilon - \frac{\mu}{2k} \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)^2 \\ 0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + c_1 f_1 \frac{\epsilon}{k} P_k - c_2 f_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} + 2 \frac{\mu \mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ w = \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.23a) \\ (3.23b) \\ (3.23c) \end{array}$$

C’est la forme (3.23) qui est résolue dans CL1D. Notons que le signe du relèvement w est opposé à la définition donnée en terme de vorticité. Tel qu’indiqué précédemment, ceci est conforme à l’implémentation dans CL1D et n’a aucun impact sur la résolution.

3.4.2 Variables logarithmiques

Une difficulté majeure lors de la résolution du modèle k - ϵ est d’assurer que les variables de turbulence demeurent positives. En effet, seules des valeurs positives sont admises pour ces variables, mais il n’est pas impossible que la solution prenne des valeurs négatives, transitoirement, lors du processus itératif . Ce comportement conduit généralement à la divergence du calcul (puisque une viscosité négative rend les équations hyperboliques), sinon à l’arrêt du programme en raison d’opérations illégales ($\sqrt{k} < 0$).

Plusieurs approches existent pour assurer la positivité. La plus simple, et également une des moins robustes, est d’appliquer directement un limiteur de forme

$$k = \max(k, \delta) \quad (3.24)$$

où δ est un petit nombre positif. Cette approche est employée dans **CL1D**. On retient que de manière générale, l'action de ce limiteur indique la présence d'un problème en amont, et ne permet que rarement la convergence du calcul.

En effet, cette façon de faire détruit le résidu en fixant la valeur de la solution, détruit les dérivées là où plusieurs points consécutifs sont fixés, et entraîne de très grands gradients si la solution passe rapidement d'un point non-limité à un point limité. Également, la fonction max ne se linéarise pas, ce qui peut entraîner la divergence du calcul par l'inadéquation de la matrice jacobienne lorsque le limiteur intervient. De plus, il est difficile de fixer δ adéquatement. Une trop grande valeur peut empêcher la convergence si la solution doit réellement s'y trouver inférieure, et une trop petite valeur entraîne des problèmes numériques, notamment lorsque l'on divise par k ou ϵ . Pour des interpolants de degré > 1 , fixer les valeurs nodales à des valeurs proches de 0 peut entraîner des valeurs interpolées négatives, ce qui ne règle pas le problème. Il faudrait alors répéter ce processus aux points d'intégration.

Une autre méthode, introduite dans **CADYF** par Ilinca et Pelletier [27], est de résoudre non pas pour les variables k et ϵ , mais pour leur logarithme. Le changement de variable suivant est introduit :

$$\mathcal{K} = \ln(k) \tag{3.25a}$$

$$\mathcal{E} = \ln(\epsilon) \tag{3.25b}$$

Cette formulation a non seulement pour effet d'assurer la positivité des variables, mais présente également d'autres avantages. D'après les auteurs, le logarithme varie plus lentement que son argument, faisant que les champs de \mathcal{K} et \mathcal{E} varient moins brusquement que k et ϵ , ce qui facilite la convergence du solveur et mène à des solutions plus précises.

L'approche présente toutefois des inconvénients, en particulier pour la résolution d'un modèle bas-Reynolds. Par exemple, la condition limite pour k à une paroi solide est $k = 0$. Or, cette condition demande d'imposer $\mathcal{K} = -\infty$, une condition limite singulière. De plus, en proche paroi, \mathcal{K} devra varier très rapidement de $-\infty$ à des valeurs de l'ordre de -10 . Il s'agit donc d'une très brusque variation sur une très courte distance. Cette approche semble donc inappropriée au voisinage immédiat des parois solides.

Heureusement, l'approche de résolution présentée dans ce mémoire n'utilise pas les conditions limites bas-Reynolds en 2D. En effet, l'intégration jusqu'à la paroi est faite en 1D dans **CL1D**. En 2D, **CADYF** utilise des conditions limites différentes, de type *loi de paroi compatible*, décrites au chapitre 4. Les conditions limites résultantes sont non-nulles et ne présentent pas de problème particulier par rapport au changement de variable (3.25).

Ainsi, la résolution dans **CADYF** est faite en variables logarithmiques. Les équations du modèle k - ϵ de Launder-Sharma en formulation logarithmique s'obtiennent en appliquant le changement de variable (3.25), au modèle tel que reformulé précédemment (3.21) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right) + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} \\ \quad + \exp(-\mathcal{K}) P_k - \rho \exp(\mathcal{E} - \mathcal{K}) - \frac{\mu}{2} \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} \end{array} \right. \quad (3.26a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} = \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right) + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + c_1 f_1 \exp(-\mathcal{K}) P_k \\ \quad - c_2 f_2 \rho \exp(\mathcal{E} - \mathcal{K}) + 2 \exp(-\mathcal{E}) \frac{\mu \mu_t}{\rho} (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \end{array} \right. \quad (3.26b)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.26c)$$

Les paramètres dépendant explicitement de k ou ϵ , comme la viscosité turbulente et le nombre de Reynolds turbulent local, doivent également être réécrits. On retient :

$$\mu_t = \rho c_\mu f_\mu \exp(2\mathcal{K} - \mathcal{E}) \quad (3.27)$$

$$R_t = \frac{\rho}{\mu} \exp(2\mathcal{K} - \mathcal{E}) \quad (3.28)$$

Remarque Le changement de variable (3.25) ne change pas le modèle de turbulence. Les équations sont les mêmes, mais reformulées à l'aide de nouvelles variables.

CHAPITRE 4 TRAITEMENT DES PAROIS

Le traitement des parois solides est un enjeu majeur dans la modélisation d'écoulements turbulents. En effet, c'est le traitement des parois qui détermine les conditions limites imposées. Le choix de la technique de modélisation des parois relève d'un compromis entre l'efficacité, la précision et la justesse recherchées.

Ce chapitre débute par un bref exposé de lois empiriques dites *loi de la paroi*. Ensuite, on recense les approches de résolution numérique : intégration numérique des modèles de turbulence bas-Reynolds jusqu'à la paroi, utilisation de lois de paroi standard ou compatibles.

4.1 Loi de la paroi

Considérons une couche limite turbulente sur une plaque plane sans gradient de pression. Près des parois solides, on peut montrer que le profil de vitesse prend une forme caractéristique, décrite par la *loi de la paroi*. Afin d'expliquer, définissons u_τ la vitesse de glissement, basée sur le cisaillement à la paroi

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (4.1)$$

En se basant sur la vitesse de glissement et la viscosité, on peut adimensionnaliser certaines quantités, dont la distance et la vitesse :

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

Cette adimensionnalisation est nécessaire pour obtenir une solution de similitude, sans quoi on aurait des profils $u(y)$ différents en fonction du nombre de Reynolds. En effet, l'épaisseur de couche limite δ est une grandeur caractéristique appropriée pour adimensionnaliser l'écoulement en dehors de la couche limite, mais la grandeur appropriée en proche paroi est le cisaillement. Ainsi, le profil de vitesse (u^+) près de la paroi est donné en fonction de y^+ par le trait plein à la figure 4.1. On y identifie également différentes zones d'intérêt pour la modélisation des conditions limites.

La première région, désignée **sous-couche visqueuse**, zone linéaire ou région laminaire, est la zone la plus proche de la paroi, allant de $y^+ = 0$ jusqu'à environ $y^+ = 5$. Dans cette région, le profil de vitesse est linéaire et le cisaillement y est pratiquement constant et presque entièrement déterminé par la contribution visqueuse.

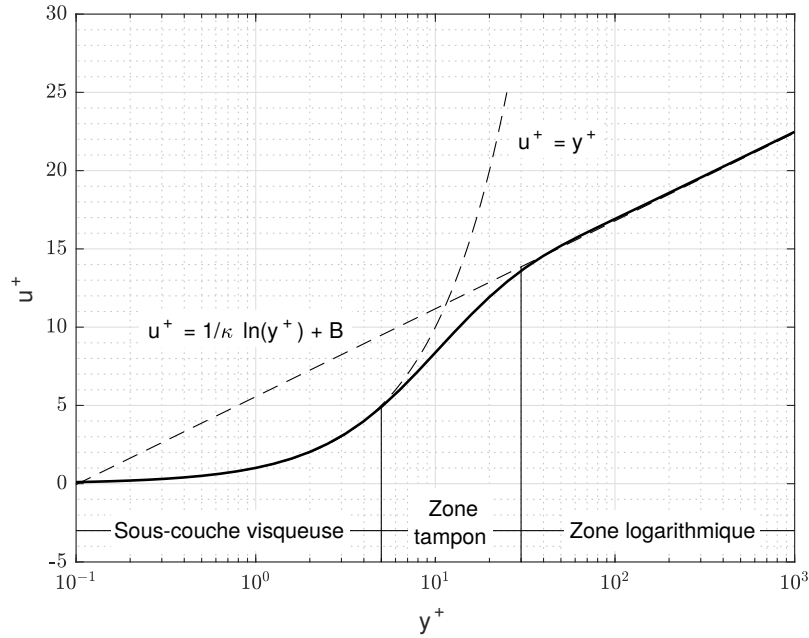


Figure 4.1 Loi de la paroi (trait plein) et solutions asymptotiques (tirets) près de la paroi

La deuxième région est la **zone tampon** ou région intermédiaire, qui relie la sous-couche visqueuse à la région logarithmique. Dans cette zone, aucune solution asymptotique ne permet de déterminer le profil de vitesse attendu, puisque les contributions au cisaillement de la contrainte de Reynolds et de la viscosité laminaire sont du même ordre de grandeur.

La troisième région est la **zone logarithmique**, dénommée ainsi en raison du profil logarithmique (4.3) que prend la vitesse. Dans cette région, le cisaillement est largement dominé par la contrainte turbulente. La loi logarithmique s'étend à partir de $y^+ > 30$. La borne supérieure dépend du nombre de Reynolds, mais on admet généralement $y^+ < 300$.

Il existe une quatrième région, la **zone de défaut**, qui s'étend au delà de la région logarithmique jusqu'au bord de la couche limite. Il ne s'agit pas d'une zone d'intérêt pour la modélisation des parois puisqu'elle en est relativement éloignée. L'échelle appropriée pour cette région est δ , l'épaisseur de couche limite, plutôt que y^+ .

Cette désignation des différentes zones intervient souvent dans la description et la discussion des modèles. Par exemple, on peut décrire un modèle « bas-Reynolds » comme un modèle de sous-couche visqueuse, ou insister sur la validité des lois de paroi standard uniquement dans la zone logarithmique. Surtout, on doit discriminer sur la capacité des modèles à décrire adéquatement les écoulements dans ces différentes régions.

4.1.1 Équations de la loi de la paroi

Dans la sous-couche visqueuse, le profil de vitesse linéaire est donné par

$$u^+ = y^+ \quad (4.2)$$

Dans la région logarithmique, le profil suit la loi logarithmique

$$\begin{aligned} u^+ &= \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \\ &= \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Le paramètre κ est la constante de von Kármán et vaut 0.41. Le paramètre B ou E dépend notamment de la rugosité de la paroi. Pour une paroi lisse, on considère généralement $E = 9$.

Finalement, on peut résumer la loi de la paroi par l'expression (4.4) du profil de vitesse :

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & 0 \leq y^+ \leq 5 \\ f(y^+) & 5 \leq y^+ \leq 30 \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & 30 \leq y^+ \leq 300 \end{cases} \quad (4.4)$$

Rappelons que la fonction $f(y^+)$ dans la zone tampon n'est pas connue.

Les différents modèles de turbulence à bas-Reynolds, lorsque résolus jusqu'à la paroi, donnent chacun leur propre version de l'expression (4.4) [17, 28]. C'est surtout la zone tampon qui varie d'un modèle à l'autre, mais aussi les constantes κ et E de la zone logarithmique.

4.1.2 Lois de la paroi généralisées

La loi de la paroi telle que décrite ci-dessus est limitée par ses hypothèses. Notamment, elle est établie pour une couche limite sans gradient de pression sur une plaque plane.

On peut concevoir des lois généralisées incorporant des effets supplémentaires. Notamment, des effets de convection, de courbure ou de gradient de pression ([29, 30, 31]). Un bref exposé à l'annexe D traite du cas de gradient de pression.

De manière générale, cette approche a pour effet de modifier en tout ou en partie l'expression (4.4).

4.2 Intégration jusqu'à la paroi

L'approche la plus simple de modélisation des parois, mais également la plus coûteuse en effort de calcul, est l'intégration du modèle bas-Reynolds jusqu'à la paroi. Dans cette approche, les conditions limites sont imposées telles qu'on les retrouverait physiquement à la paroi, et le maillage doit résoudre la couche limite avec une résolution suffisamment fine pour bien y capturer les phénomènes de proche paroi.

Rigoureusement, cette approche ne constitue pas un traitement spécial des parois. On y impose simplement les conditions limites usuelles et on résout dans la couche limite.

Or, cette approche s'avère très coûteuse en ce qui concerne le maillage. En pratique, elle peut nécessiter d'avoir plus de la moitié des éléments dans une région équivalent à 1 % du domaine pour assurer une résolution suffisante. Dépendamment du modèle de turbulence, du nombre de Reynolds et du cas traité, la résolution requise dans la couche limite peut être encore plus grande.

Également, le comportement des variables très près de la paroi peut poser des problèmes numériques. Deux phénomènes peuvent survenir. D'abord, on voit dans les équations (3.4) la présence de divisions par k ou ϵ . Lorsque ces termes tendent vers 0 à la paroi, la division donne des termes de plus en plus grands. Le comportement est supposé ne pas être singulier étant donné les comportements asymptotiques de k et ϵ . Or, il n'est pas garanti que ce comportement soit respecté au cours du processus de résolution. Ces non-linéarités nuisent à la robustesse du solveur.

L'autre problème est la positivité des variables. On a vu précédemment qu'il est crucial de maintenir la positivité des variables de turbulence. Or, l'intégration jusqu'à la paroi est incompatible avec l'approche des variables logarithmiques. Il faut donc tenter de préserver la positivité autrement, ce qui est d'une efficacité limitée. Comme les variables doivent prendre de très petites valeurs, le moindre dépassement dû à une trop grande correction de Newton peut être catastrophique. Notons néanmoins que ce second point pourrait être mitigé par le choix d'un modèle qui se comporte bien en proche paroi, mais tel que discuté précédemment, tous les modèles testés présentent des difficultés numériques.

Ainsi, bien que l'intégration jusqu'à la paroi soit conceptuellement plus simple, elle n'est certainement pas plus facile. Elle nécessite des maillages très fins et elle est numériquement peu robuste. Toutefois, lorsqu'utilisée adéquatement, elle demeure la méthode la plus précise de traiter un modèle particulier puisqu'aucune hypothèse supplémentaire n'est faite concernant la couche limite.

Notons toutefois que l'intégration jusqu'à la paroi n'est pas toujours valide. En effet, certains modèles comme le modèle $k-\epsilon$ standard ne sont pas valides en proche paroi. D'autres modèles présentent des conditions limites singulières à la paroi. C'est le cas notamment du modèle $k-\omega$ et ses variantes, où ω y tend vers l'infini. Différentes approches sont proposées pour la régularisation de la condition limite, afin de permettre la résolution jusqu'à la paroi, avec différents degrés d'efficacité.

4.3 Lois de paroi

La motivation principale des lois de paroi est de permettre la résolution des modèles de turbulence qui ne sont pas valides dans la sous-couche visqueuse ou la zone de transition, comme le modèle $k-\epsilon$ standard. Elles peuvent aussi servir à réduire les coûts de calcul dans la couche limite pour les modèles valides jusqu'à la paroi.

De manière générale, toute loi de paroi définit une fonction (loi) de forme $u^+ = f(y^+)$, ainsi que pour les autres variables du problème : $k^+ = g(y^+)$, $\epsilon^+ = h(y^+)$... Ces fonctions peuvent prendre différentes formes, notamment de loi analytique, implicite, ou tabulée. Connaissant cette loi, les conditions limites peuvent être imposées à une certaine distance de la paroi, permettant au modèle de ne pas résoudre l'entière de la couche limite. Les modèles dits « haut-Reynolds » peuvent donc être utilisés uniquement dans leur région de validité, la zone logarithmique.

L'approche nécessite donc de *décaler* le domaine de calcul d'une distance d par rapport à la paroi solide. La figure 4.2 illustre la différence entre le domaine numérique, sur lequel on résout les équations du modèle, et le domaine « réel », dans lequel l'écoulement évolue. Insistons sur le fait que le fluide s'écoule également en dehors du domaine de calcul, dans la zone de loi de paroi. Par conséquent, les conditions limites ne sont pas imposées sur la paroi, mais *dans* l'écoulement.

L'approche illustrée à la figure 4.2 est celle utilisée pour la méthode des éléments finis. En volumes finis, les lois de paroi sont traitées de manière très différente, tel qu'illustré à la figure 4.3. Généralement, le maillage va jusqu'à la paroi, et c'est la taille de la première cellule qui détermine la distance d . Une conséquence majeure est qu'il est difficile de raffiner le maillage en gardant d constant. Ceci fait en sorte que le raffinement de maillage en volumes finis a pour effet de changer les conditions limites. Ceci conduit souvent à des solutions dépendantes au maillage en volumes finis. Tel qu'illustré, il s'agit d'une inconsistance propre à la méthode, et non aux lois de paroi. Kalitzin [32] propose une façon de contourner ce problème en utilisant des « δ -grid », soit des maillages décalés comme en éléments finis.

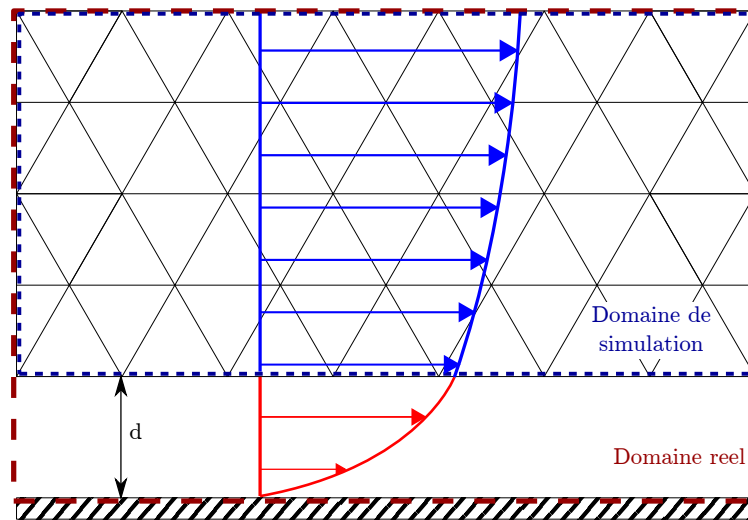


Figure 4.2 Domaines pour l'approche de loi de paroi

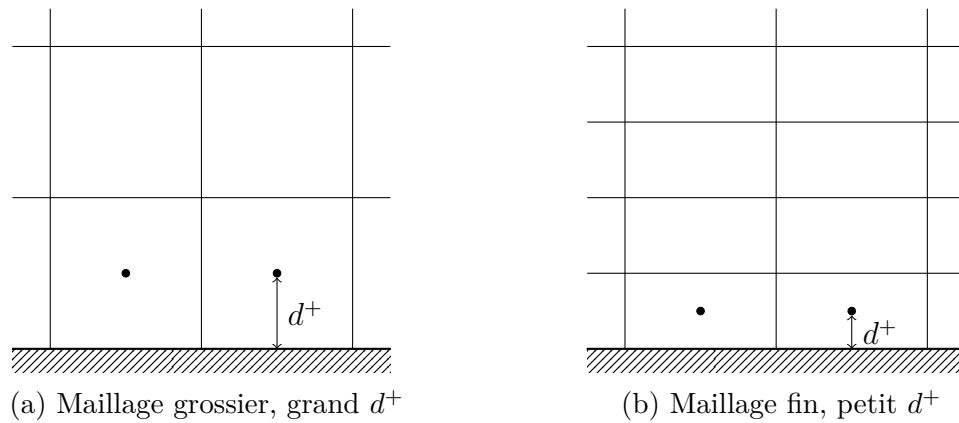


Figure 4.3 Lois de paroi en volumes finis

On s'intéresse ici à deux types de loi de paroi. Le premier type est les lois de paroi standard ou de Spalding. Sous cette forme, les conditions limites sont basées sur la loi logarithmique et sur l'hypothèse que le cisaillement est constant dans la sous-couche visqueuse. De là découlent des conditions limites compatibles avec le modèle k - ϵ standard.

Le second type est les lois de paroi dites compatibles. Ces lois sont basées sur l'intégration à la paroi d'un écoulement de Couette turbulent. Les conditions limites résultantes sont compatibles avec le modèle bas Reynolds employé.

Échelles de vitesse

Les lois de paroi sont également classifiées en termes d'*échelles de vitesse*. Une échelle de vitesse est une vitesse qui caractérise la couche limite et par extension la loi de paroi. Les échelles de vitesse peuvent être basées sur différentes grandeurs. Ainsi, les lois de paroi peuvent tirer avantage de ces différentes échelles dans l'optique d'élargir leur plage de validité. Les principales échelles de vitesse sont définies ci-dessous, en termes du cisaillement, de l'énergie cinétique et du gradient de pression :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}} \quad u_k = c_\mu^{\frac{1}{4}} \sqrt{k} \quad u_p = \left(\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \frac{\nu}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.5)$$

et on peut librement les combiner, par exemple :

$$u_c = u_\tau + u_p \quad (4.6)$$

4.3.1 Loi de paroi standard

Les lois de paroi standard sont basées sur la loi de la paroi logarithmique (Section 4.1). Ainsi, elles imposent des conditions limites compatibles avec la loi logarithmique.

Une contrainte des lois de paroi standard est que l'on doit s'assurer que la frontière du domaine de calcul (soit le point d'application de la loi de paroi) se trouve dans la zone logarithmique, sans quoi sa validité est mise en doute. La contrainte équivaut à avoir $30 \leq d^+ \leq 300$ aux « parois » du domaine numérique.

Cette contrainte ne peut être vérifiée qu'*a posteriori* puisqu'elle dépend du cisaillement, donc de la solution. Concrètement, il incombe au modélisateur de fixer une distance d avant la simulation, d'effectuer le calcul, puis de vérifier que la distance adimensionnelle d^+ résultante soit dans l'intervalle admissible, et d'ajuster d et itérer ainsi au besoin.

Malheureusement, cette contrainte, en plus d'être un fardeau supplémentaire pour le modélisateur, est difficilement atteinte pour des écoulements complexes dans des géométries complexes. En effet, la présence de points de stagnation, de séparation de couche limite ou de bulles de recirculation annulent ponctuellement le cisaillement, menant à $d^+ = 0$ indépendamment de d . Parfois, la plage de valeurs que prend d^+ sur une paroi est trop grande pour que varier d corrige la situation, par exemple dans un cas où, sur une même paroi, d^+ est par endroits trop petits et par ailleurs trop grand.

Les hypothèses utilisées pour définir ce type de loi de paroi constituent un désavantage important. En effet, la loi logarithmique de la paroi est valide pour un écoulement de couche limite développée sur une plaque plane sans gradient de pression. Ainsi, l'emploi d'une loi de paroi revient à considérer la présence d'une couche limite au voisinage de la paroi ainsi modélisée. Or, une couche limite n'existe pas forcément. On pense notamment au point de stagnation d'un cylindre ou à une bulle de recirculation.

Également, l'analogie avec une plaque plane peut s'avérer douteuse lorsque les parois modélisées présentent une courbure importante. On fait alors implicitement l'hypothèse que la surface courbe est analogue à petite échelle à une surface plane.

Même en l'absence de courbure marquée ou de recirculation, les lois de parois sont souvent critiquées [33], notamment pour leur piètre capacité de prédiction d'écoulements avec gradient de pression adverse. Certains auteurs considèrent toutefois que ces critiques sont basées sur des calculs réalisés avec des maillages insuffisamment convergés [34].

Un autre inconvénient est la sensibilité des prédictions à la valeur de la constante κ de von Kármán. Il existe une certaine incertitude sur la valeur de cette constante, et nous avons montré que le débit prédit pour un écoulement de Poiseuille avec des lois de paroi standard, pouvait varier de l'ordre de 3% en changeant la constante de 0.41 à 0.42 (valeurs admises dans l'incertitude de κ). Cette sensibilité est notamment due à la forte dépendance de l'écoulement au cisaillement.

Malgré ces inconvénients, les lois de paroi standard demeurent une bonne approximation dans nombre de situations. Elles ont également l'avantage de réduire considérablement le coût de calcul, puisque la sous-couche visqueuse n'a pas à être résolue. Cette région demanderait autrement un très grand nombre de points de calcul. Il s'agit d'un bon compromis entre la précision et le coût de calcul.

Nous présentons ci-dessous les lois de paroi à une et à deux échelles de vitesse.

Remarque Les développements sont faits pour une paroi ayant une vitesse de translation dans la direction tangente. La vitesse est donc exprimée comme relative : $u_{\text{rel}} = u - u_{\text{paroi}}$. Cette approche est notamment nécessaire pour modéliser un écoulement de Couette où la paroi se trouve en mouvement. Pour une paroi fixe, $u_{\text{paroi}} = 0$ permet de retrouver les formes standard des lois de paroi.

4.3.1.1 Loi de paroi à une échelle de vitesse

La loi de paroi à une échelle se base sur la loi logarithmique. Elle est dite à une échelle de vitesse puisqu'elle ne définit que l'échelle u_τ . En supposant que le profil de l'écoulement respecte la loi logarithmique, la grandeur d^+ est déterminée en résolvant l'équation implicite

$$\frac{|u_{\text{rel}}|d}{\nu} = \frac{d^+}{\kappa} \ln(Ed^+) \quad (4.7)$$

Connaissant d^+ , les autres grandeurs sont obtenues par leur définition :

$$u_\tau = \frac{d^+ \nu}{y}$$

$$u^+ = \frac{|u_{\text{rel}}|}{u_\tau}$$

Finalement, les valeurs de u_τ et u^+ donnent les conditions limites :

$$\tau_w = -\rho u_\tau \frac{u_{\text{rel}}}{u^+} \quad (4.8a)$$

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad (4.8b)$$

$$\epsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa d} \quad (4.8c)$$

Alternativement, l'énergie cinétique de turbulence peut être déterminée par une condition de Neumann homogène : $\partial k / \partial \mathbf{n} = 0$. Cette condition limite provient de l'écoulement de Couette turbulent, où la turbulence est à l'équilibre et le cisaillement dans la zone logarithmique est presque constant, égal à $\sqrt{c_\mu} k$. Puisque l'énergie cinétique y est pratiquement constante, on peut imposer une dérivée nulle. On applique normalement cette condition de Neumann pour la loi de paroi à deux échelles de vitesse décrite ci-après, mais elle est également valide dans le présent cas. Il est généralement plus facile de converger la solution avec cette forme de condition limite que la formulation de Dirichlet. On privilégie donc cette forme dans CADYF.

4.3.1.2 Loi de paroi à deux échelles de vitesse

La motivation de la loi de paroi à deux échelles concerne le transfert de chaleur turbulent. Une loi de paroi à une échelle prédit un transfert de chaleur minimal là où le cisaillement (u_τ) s'annule, par exemple au point de stagnation d'un cylindre ou d'un jet impactant. Or, c'est plutôt un maximum de transfert de chaleur qui est attendu dans cette région, puisque les fluctuations turbulentes y sont maximales. Ainsi, une seconde échelle de vitesse basée sur l'énergie cinétique (fluctuations de vitesse) est introduite [35] :

$$u_k = c_\mu^{\frac{1}{4}} \sqrt{k}$$

Cette nouvelle échelle de vitesse ne s'annule pas au point de stagnation et permet donc une meilleure prédiction du transfert thermique.

Une autre avantage découlant de l'introduction d'une deuxième échelle de vitesse concerne l'implémentation dans le code de calcul. Il n'est plus nécessaire de résoudre une équation implicite pour déterminer d^+ , ce qui facilite la mise en oeuvre.

L'échelle u_k peut en effet être directement évaluée à partir de k . Ensuite, c'est cette échelle qui définit d^+ :

$$d^+ = \frac{u_k y}{\nu} \quad (4.9)$$

En supposant que l'écoulement respecte la loi logarithmique, les quantités manquantes se calculent :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ed^+)$$

$$u_\tau = \frac{|u_{\text{rel}}|}{u^+}$$

Les conditions limites sont similaires à la loi à une échelle :

$$\tau_w = -\rho u_k \frac{u_{\text{rel}}}{u^+} \quad (4.10a)$$

$$\frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (4.10b)$$

$$\epsilon = \frac{u_k^3}{\kappa d} \quad (4.10c)$$

Pour être consistant, l'échelle u_k remplace u_τ dans l'expression des conditions aux limites. Notons qu'il est ici impératif d'imposer une condition de Neumann pour k . En effet, la formulation en Dirichlet conduirait à toujours imposer la valeur initiale de k .

4.3.2 Loi de paroi compatible

Les lois de paroi dites compatibles sont obtenues en intégrant jusqu'à la paroi un écoulement de Couette turbulent 1D avec un modèle de turbulence bas-Reynolds. La résolution de ce problème donne un profil de loi de la paroi différent de celui vu en 4.1. En effet, on peut alors incorporer des effets qui ne sont pas pris en compte dans les lois décrites précédemment, dont les effets de proche paroi, mais aussi d'autres effets comme la présence d'un gradient de pression. Surtout, on obtient un profil de solution défini pour toute valeur de y^+ , incluant la zone tampon. Ceci facilite la modélisation en éliminant la contrainte des lois de paroi standard d'avoir $d^+ > 30$.

Un écoulement de Couette turbulent est résolu et le profil de solution $(u^+(y^+), k^+(y^+) \dots)$ résultant de l'adimensionnalisation (4.11) est stocké sous forme d'un tableau de données. Le contenu détaillé du tableau est explicité à l'annexe C. Le tableau de données est ensuite chargé en mémoire par le solveur utilisant les lois de paroi compatibles, qui suit les procédures décrites ci-après pour déterminer les conditions limites à appliquer aux parois.

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad k^+ = \frac{k}{u_\tau^2} \quad \epsilon^+ = \frac{\epsilon\nu}{u_\tau^4} \quad \omega_z^+ = \frac{\omega_z\nu}{u_\tau^2} \quad (4.11)$$

La nomenclature de ce type de loi est sujette à discussion. On peut les désigner de loi de paroi compatible, consistante, adaptative, ou tabulée. Les qualificatifs de *compatible* ou *consistante* sont appropriés puisque la loi est obtenue en intégrant un modèle spécifique, donc les conditions limites résultantes sont compatibles avec ce modèle, ce qui n'est pas forcément le cas pour les lois de parois standard. La désignation *adaptative* met plutôt l'accent sur la validité de la loi pour tout d^+ : puisque les conditions limites sont valides peu importe la distance à la paroi, la loi de paroi s'adapte à la modélisation. Notons que la notion de *consistance* fait également référence à ce fait. Le qualificatif d'*adaptative* ne désigne pas nécessairement le processus d'adaptation de maillage, qui est facultatif pour obtenir une telle loi de paroi. Cependant, il est tout de même approprié lorsque la loi est obtenue sur un maillage adaptatif. Finalement, on peut généraliser à *loi de paroi tabulée*. Ce terme désigne simplement la forme qu'elle prend, soit un tableau de données. Ceci est en opposition avec les lois de parois classiquement définies par des fonctions analytiques de d^+ .

4.3.2.1 Loi de paroi compatible à une échelle de vitesse

Pour déterminer d^+ , plutôt que d'utiliser la relation implicite (4.7), on utilise une fonction auxiliaire

$$f(y^+) = u^+ y^+ = \frac{uy}{\nu} \quad (4.12)$$

Cette fonction a la particularité d'être exprimée en variables sans dimension, mais d'être déterminée par les variables dimensionnelles connues. En d'autres mots, le solveur peut évaluer directement la quantité f à partir de la solution. Connaissant f , on cherche à l'inverser pour déterminer d^+ . En pratique, cette inversion est une simple interpolation dans le tableau. On voit alors que nous nous sommes effectivement affranchis de l'hypothèse que d^+ soit dans la zone logarithmique, puisque f est défini partout et de manière continue, indépendamment des régions de la loi de la paroi.

Connaissant d^+ , on se sert de sa définition pour fixer la valeur de l'échelle de vitesse u_τ , puis u^+ :

$$u_\tau = \frac{d^+ \nu}{d}$$

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

Les conditions limites résultantes sont :

$$\tau_w = -\rho u_\tau \frac{u}{u^+} \quad (4.13a)$$

$$k = u_\tau^2 k_{\text{tab}}^+ \quad (4.13b)$$

$$\epsilon = \frac{u_\tau^4}{\nu} \epsilon_{\text{tab}}^+ \quad (4.13c)$$

Les quantités notées « $_{\text{tab}}$ » sont les valeurs interpolées dans le tableau. Comme pour la loi de paroi standard, il serait correct d'appliquer la condition limite de Neumann sur k provenant de la loi compatible à deux échelles. C'est ce qui est fait dans CADYF.

4.3.2.2 Loi de paroi compatible à deux échelles de vitesse

Comme pour la loi compatible à une échelle de vitesse, on détermine d^+ grâce à une fonction auxiliaire. Ici, cette fonction est basée sur l'énergie cinétique :

$$f(y^+) = k^+ y^{+2} = \frac{ky^2}{\nu^2} \quad (4.14)$$

Comme précédemment, on peut déterminer la valeur de f directement à partir de la solution, puis inverser dans le tableau pour déterminer d^+ .

Connaissant d^+ , les échelles de vitesse sont fixées :

$$u_k = \sqrt{\frac{k}{k_{\text{tab}}^+}}$$

$$u_\tau = \frac{u}{u_{\text{tab}}^+}$$

Les conditions limites résultantes sont :

$$\tau_w = -\rho u_k \frac{u}{u^+} \quad (4.15a)$$

$$\frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = \frac{u_k^3}{\nu} \left[\frac{\partial k^+}{\partial y^+} \right]_{\text{tab}} \quad (4.15b)$$

$$\epsilon = \frac{u_k^4}{\nu} \epsilon_{\text{tab}}^+ \quad (4.15c)$$

4.4 Approches alternatives

Notons également que d'autres approches de traitement des parois existent. On relève notamment la méthode d'imbrication de domaine (*embedded subgrid*) où un maillage 1D est imbriqué dans le maillage 2D près des parois solides [36], ainsi que la décomposition de domaine [37, 38] où le problème est séparé en un problème global et un problème de proche paroi.

De manière générale, ces approches alternatives sont conçues pour des algorithmes de volumes finis. En éléments finis, les lois de paroi sont plus facilement mises en œuvre et sont plus flexibles, ainsi nous ne nous intéressons pas à ces alternatives.

CHAPITRE 5 APPLICATION NUMÉRIQUE

Ce chapitre traite de la mise en application des modèles bas-Reynolds et des lois de paroi adaptatives. Il est construit en deux sections. Les applications du modèle unidimensionnel sont présentées en premier, après quoi suivent les applications du solveur bidimensionnel.

Dans les deux cas, certains des problèmes résolus constituent des cas de *vérification*, et d'autres des cas de *validation*. Il s'agit d'une nomenclature propre à la mécanique des fluides numérique qu'il convient ici de préciser. La vérification vise à s'assurer que le solveur résout adéquatement les équations, indépendamment de leur nature physique ou réelle. Il s'agit d'un processus essentiellement mathématique où c'est la *résolution* du problème qui est en cause, et non pas la *solution*. La *validation*, en contrepartie, consiste à s'assurer que les équations que l'on résout (correctement, tel que vérifié), modélisent adéquatement la réalité physique.

5.1 Applications unidimensionnelles

Afin d'assurer la mise en œuvre adéquate dans le solveur bidimensionnel, il convient d'abord de s'assurer que l'implémentation 1D est adéquate.

Plus précisément, le solveur CL1D est vérifié par la méthode des solutions manufacturées, avant que ne soient générés les tableaux de données de la loi de paroi consistante. Puis, ce sont les lois de paroi compatibles qui sont vérifiées par un test de raccordement. Ensuite, un écoulement en canal plan est comparé avec des données de DNS.

5.1.1 Vérification de CL1D par la méthode des solutions manufacturées

La méthode des solutions manufacturées telle que décrite par Roache [39] est une technique de vérification où l'on construit une solution exacte au modèle testé, permettant de vérifier que le solveur n'introduit pas d'erreur et n'ait pas de comportement erroné.

La méthode consiste à définir analytiquement et de manière arbitraire une solution ($\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $k(\mathbf{x})$, $\epsilon(\mathbf{x})\dots$) au problème dont on veut vérifier l'implémentation. Cette solution, dite *manufacturée*, n'a pas besoin d'être physique. En effet, la vérification consiste à s'assurer que les équations soient résolues correctement, peu importe si elles décrivent la réalité ou non.

Plus spécifiquement, on ajoute des termes source Q dans les équations du modèle, ici le système (3.23) à la page 42. En substituant la solution manufacturée dans les équations du

modèle, on détermine la valeur de ces termes source, qui sont ensuite ajoutés aux équations, de sorte que la solution manufacturée soit la solution *exacte* du système d'équations modifiées.

Connaissant alors une solution exacte, il devient facile de voir si l'erreur de la solution calculée tend bien vers 0 lorsque le maillage est raffiné, car on peut calculer l'erreur exacte. On s'intéresse notamment aux taux de convergence auxquels l'erreur diminue, qu'on compare aux taux théoriques attendus.

Cet exercice permet par le fait même de vérifier le processus d'estimation d'erreur et d'adaptation de maillage. Il devient effectivement facile de voir si l'erreur estimée approche adéquatement l'erreur exacte. Une différence entre le comportement attendu de l'erreur et le comportement observé témoigne d'un problème dans l'implémentation ou dans la résolution numérique des équations.

Une solution manufacturée unidimensionnelle est construite sur un domaine de hauteur unitaire $0 \leq y \leq 1$. Elle est définie par

$$u(y) = \frac{\sin(2\pi y)}{2\pi} + y \quad (5.1a)$$

$$k(y) = \sin^2(\pi y) \quad (5.1b)$$

$$\epsilon(y) = \sin(\pi y) \quad (5.1c)$$

$$w(y) = \cos(2\pi y) + 1 \quad (5.1d)$$

Cette solution est conçue pour ressembler (très) vaguement à un écoulement de Couette turbulent et surtout pour conserver les conditions limites propres au modèle bas-Reynolds. Également, elle est conçue pour s'assurer que les termes tels μ_t demeurent définis lorsque k et ϵ tendent vers 0 près des parois. Les conditions limites sont

$$u(0) = 0 \quad , \quad u(1) = 1$$

$$k(0) = k(1) = 0$$

$$\epsilon(0) = \epsilon(1) = 0$$

Le problème est résolu sur une succession de maillages adaptatifs avec des éléments linéaires puis quadratiques. Dans les deux cas, le maillage de départ compte 50 éléments uniformément répartis. Les maillages finaux comptent respectivement 6280 éléments linéaires et 3904 éléments quadratiques.

Les figures 5.1 et 5.2 illustrent les erreurs (estimée, exacte et de reconstruction) définies par (2.17) à la page 22, ainsi que l'indice d'efficacité θ , respectivement pour des éléments linéaires et quadratiques, en fonction du nombre de nœuds N .

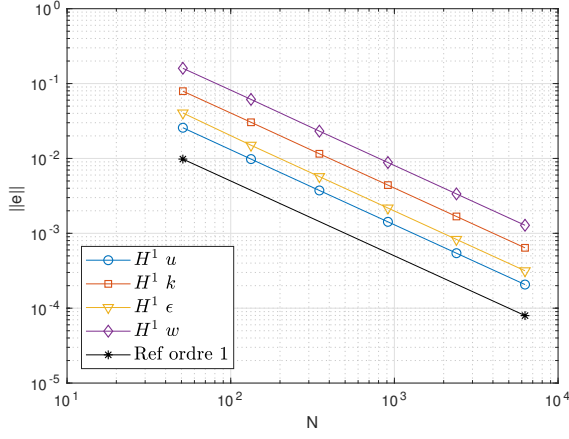
Puisque l'erreur est calculée en norme H^1 pour toutes les variables, les taux de convergence attendus sont $\mathcal{O}(h^p)$, avec $p = 1$ pour les éléments linéaires et $p = 2$ pour les éléments quadratiques. Les taux de convergence observées sont donnés au tableau 5.1 et sont également visibles graphiquement, en comparant aux droites donnés en référence. Les taux de convergence sont généralement tels qu'attendus. Quelques exceptions sont toutefois à noter.

Tableau 5.1 Ordres de convergence de l'erreur

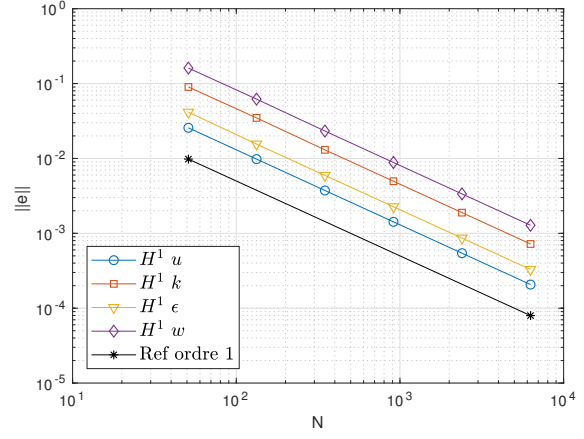
	P1				P2			
	u	k	ϵ	w	u	k	ϵ	w
Erreur estimée	1.000	1.001	1.000	1.001	2.000	1.996	1.995	1.000
Erreur exacte	1.000	1.000	1.001	1.001	2.000	2.000	2.000	1.000
Erreur de reconstruction	1.843	1.003	0.990	1.497	2.001	1.989	1.990	1.500

En P1, on note la superconvergence de l'erreur de reconstruction pour u et w . Ceci est illustré par des pentes plus prononcées que la droite de référence d'ordre 1 à la figure 5.1c et par les ordres donnés au tableau 5.1. Il n'est pas clair pourquoi seules ces deux variables exhibent ce comportement. Également, on observe que l'indice d'efficacité de k et ϵ ne tendent pas vers l'unité, mais plutôt vers une constante de l'ordre de 90%. Ceci s'explique à partir de l'erreur de reconstruction pour ces variables, qui converge au même ordre que l'erreur exacte. Ainsi, il persiste un décalage entre l'erreur exacte et l'erreur estimée. À l'opposé, l'erreur de reconstruction étant d'ordre plus élevée pour u et w , l'indice d'efficacité de ces variables tend vers l'unité tel que voulu par le théorème 2.1 (page 23).

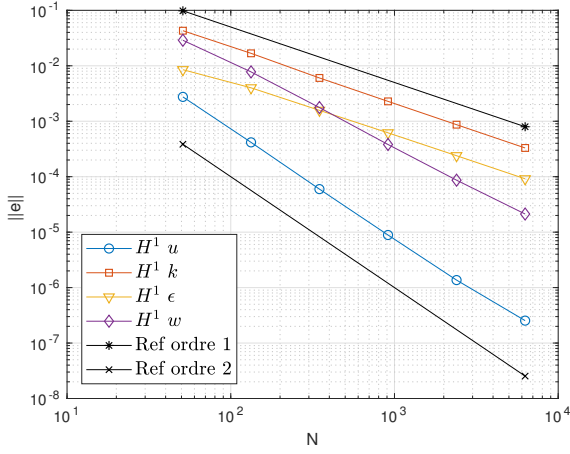
En P2, l'ordre de convergence pour w , tant pour l'erreur exacte qu'estimée, est de 1. On pourrait pourtant croire que cet ordre devrait être de 2. Or, il faut faire attention. La variable w est en soi la projection de la dérivée de u . En d'autres mots, l'ordre de convergence de la dérivée de u est d'un ordre inférieur à l'ordre de convergence de u . Ce comportement est normal. Notons que l'erreur de reconstruction est d'un ordre d'environ 1.5, ainsi θ_w tend tout de même vers 1. Il n'est pas clair pourquoi il y a une différence d'un demi-ordre pour l'erreur de reconstruction de w . On remarque également que l'indice d'efficacité de k et ϵ est très faible sur le premier maillage (Figure 5.1d). Ceci se traduit par une différence marquée entre les erreurs estimée et exacte. Ceci s'explique par la grossièreté du maillage de départ. Dès le premier maillage adaptatif, l'erreur estimée rejoint l'erreur exacte, donnant un indice d'efficacité beaucoup plus raisonnable. On peut supposer que le maillage de départ se situe en dehors de la région de convergence asymptotique.



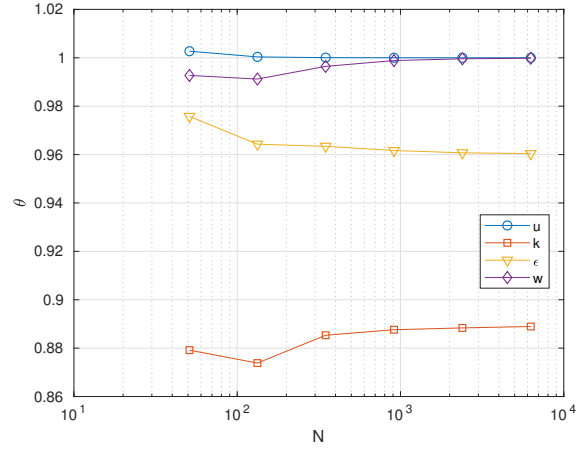
(a) Erreur estimée



(b) Erreur exacte

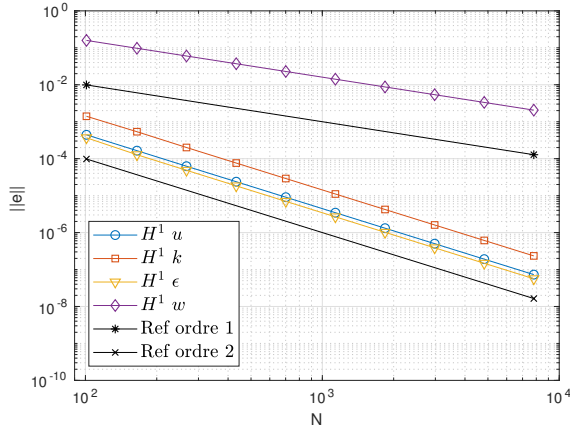


(c) Erreur de reconstruction

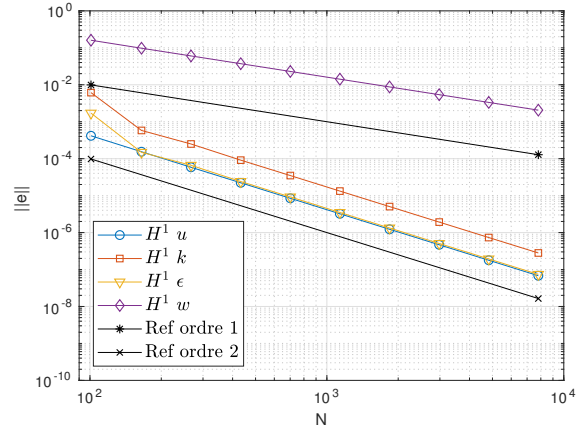


(d) Indice d'efficacité

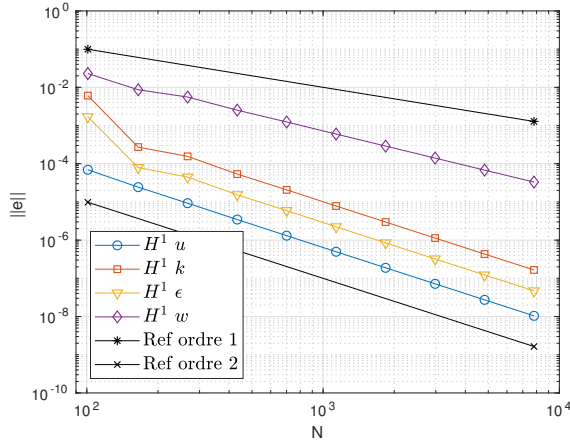
Figure 5.1 Erreur de la solution manufacturée pour des éléments linéaires



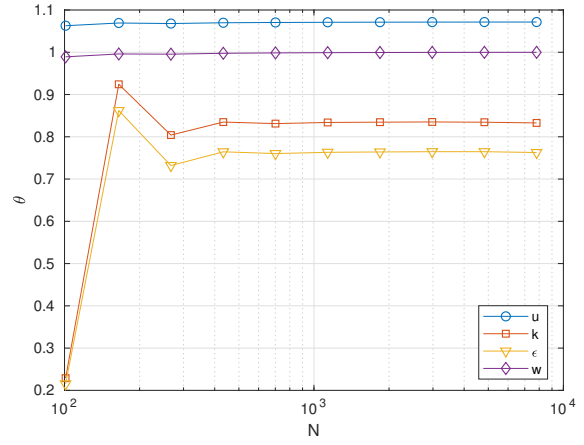
(a) Erreur estimée



(b) Erreur exacte



(c) Erreur de reconstruction



(d) Indice d'efficacité

Figure 5.2 Erreur de la solution manufacturée pour des éléments quadratiques

Dans tous les cas, le taux de convergence de l'erreur de reconstruction est soit du même ordre ou d'un ordre plus élevé que l'erreur exacte. Tel que discuté à la section 2.4.2, l'ordre de convergence de l'erreur de reconstruction devrait être plus élevé que celui de l'erreur exacte pour assurer que l'estimateur soit asymptotiquement exact. Or, dans plusieurs cas, les taux observés sont du même ordre, ainsi θ tend vers une constante différente de 1. De manière générale, ces constantes sont suffisamment proches de l'unité pour bien piloter le processus d'adaptation de maillage.

5.1.2 Génération du tableau de données de loi de paroi adaptative

Le solveur 1D étant vérifié, on peut à présent générer des tableaux de données des lois de paroi compatibles. On les obtient en résolvant un écoulement de Couette turbulent 1D. Ce cas constitue également l'opportunité de tester l'adaptation de maillage. On souhaite vérifier que la taille des éléments générés soit telle que prescrite, et que l'erreur approche l'équidistribution.

Le problème est résolu en partant d'un maillage régulier puis en adaptant le maillage à l'erreur en suivant la stratégie de réduction d'erreur décrite en 2.4.3. Les différents maillages sont illustrés à la figure 5.3. Puisque des maillages 1D s'illustrent mal, on trace la distribution de taille de maille. Comme on peut le constater, les maillages adaptatifs placent des éléments de petite taille près des bords, et de grande taille au centre du domaine. C'est effectivement en proche paroi que la solution présente une forte courbure et d'imposantes non-linéarités et donc que les éléments doivent être concentrés. Un limiteur de taille maximale agit au centre du domaine sur les maillages 2, 3 et 4. On note également à la figure 5.3b la présence d'un maximum local en proche paroi (également visible à la figure 5.4). En fait, il s'agit de l'intersection de deux minima prescrits respectivement pour k à gauche et ϵ à droite. Ceci illustre l'effet de l'équation (2.25).

La figure 5.4 compare la taille de maille prescrite par élément (δ_{elm}) et sa représentation interpolée ($\delta(y)$) à la taille des éléments générés (h_{elm}) au deuxième cycle de remaillage (génération du maillage 3). Tel que mentionné précédemment, la taille des éléments générés devrait être égale à la taille prescrite interpolée. C'est bien ce que l'on constate. Plus précisément, la courbe $\delta(y)$ croise h_{elm} très près du centre de chaque élément généré. Le croisement serait exactement au centre en l'absence du facteur d'étirement N_s/A_s défini à la section 2.4.4. On note également que la taille réelle des éléments est telle qu'il est impossible qu'elle respecte la taille prescrite par éléments (δ_{elm}) sans interpolation. Ceci s'explique simplement par le fait que la taille prescrite est discontinue et peut être très différente de la taille de l'élément sur

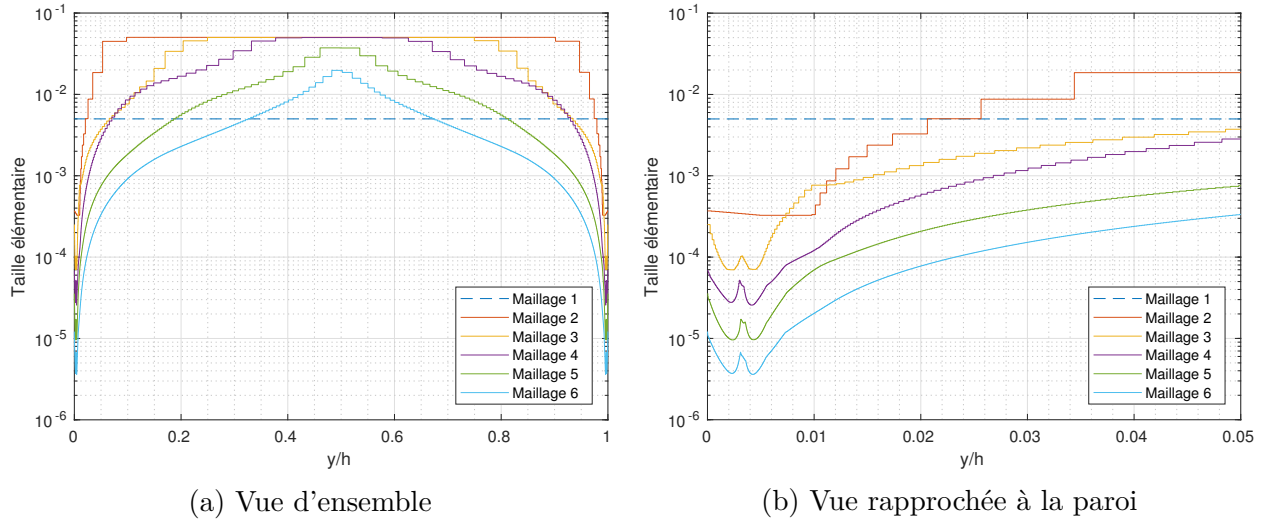


Figure 5.3 Taille des éléments des maillages adaptatifs

lequel elle est prescrite. Remarquons finalement que la taille des éléments générés se comporte bien même lorsqu'elle est croissante, décroissante, et passe par des extrema.

La figure 5.5 présente la distribution de la norme de l'erreur estimée sur les éléments lors du processus adaptatif pour quelques maillages adaptatifs. En raffinant le maillage de manière adaptative, on remarque trois phénomènes. Le premier est le déplacement vers la gauche du pic d'erreur. Ceci signifie que le niveau d'erreur moyen de la solution diminue en augmentant le nombre d'éléments. Deuxièmement, on note que le nombre d'éléments ayant un même niveau d'erreur augmente. Ceci se traduit par une augmentation du pic vers le haut, puisque davantage d'éléments se situent dans cette même bande. Finalement, le troisième phénomène est la diminution de l'écart-type. Visuellement, la « largeur » du pic diminue en raffinant le maillage. Ceci est attribuable à la stratégie de remaillage employée qui vise à équirépartir l'erreur (c.f. section 2.4.3). Bref, en adaptant le maillage, de plus en plus d'éléments ont un niveau d'erreur de plus en plus faible et uniforme. Ceci indique l'efficacité de la stratégie adaptative de réduction et d'équirépartition de l'erreur.

Économie de coût associée à l'adaptation de maillage

Nous comparons des maillages adaptatifs à des maillages concentrant les éléments près des bords par une loi de concentration analytique en tangente hyperbolique. Idéalement, cette comparaison se ferait par rapport à un maillage régulier. Or, le nombre d'éléments requis pour atteindre la région de convergence asymptotique est excessivement élevé. Lors de nos essais, l'erreur sur des maillages uniformes de 2000 éléments restait environ constante en doublant

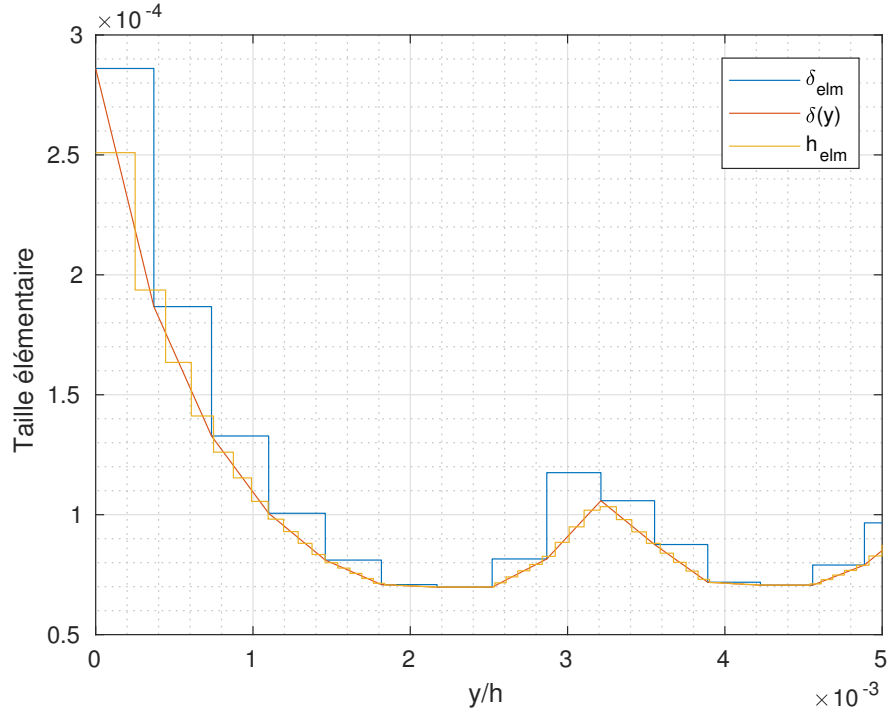


Figure 5.4 Taille des éléments prescrite et générée

le nombre d'éléments, rendant inapplicable la présente analyse. Une autre façon d'illustrer ce point est en considérant la taille des éléments générés par le processus adaptatif. Près des bords, les éléments ont une taille de l'ordre de grandeur de 10^{-4} . Ainsi, pour capturer les effets de proche paroi sur un maillage régulier, il faudrait avoir environ 10000 éléments. Ainsi, les maillages réguliers ne capturent pas la physique sous-jacente et maintiennent un grand niveau d'erreur, à moins d'avoir des maillages extrêmement fins. Le solveur 1D n'est pas optimisé pour des problèmes de cette taille. On choisit donc des maillages concentrés.

Le tableau 5.2 présente le niveau d'erreur obtenu sur un maillage concentré de distribution arbitraire et sur un maillage obtenu par raffinement adaptatif. Comme on peut le constater, pour une même précision, un maillage adaptatif a besoin de seulement 35% du nombre de nœuds qu'un maillage arbitrairement concentré. Donc, à précision donnée, l'adaptation de maillage diminue considérablement le nombre d'éléments. Par extrapolation à partir du taux de convergence $\mathcal{O}(h^1)$, un maillage adaptatif de 1000 éléments aurait une erreur valant entre 20% et 35% de l'erreur sur le maillage non-adaptatif. Donc, pour un nombre d'éléments données, l'adaptation de maillage donne une solution plus précise.

Finalement, le remaillage adaptatif est une approche particulièrement intéressante pour la génération du tableau de données de loi de paroi. En effet, elle permet de minimiser l'erreur à faible coût lors de la génération de ce tableau.

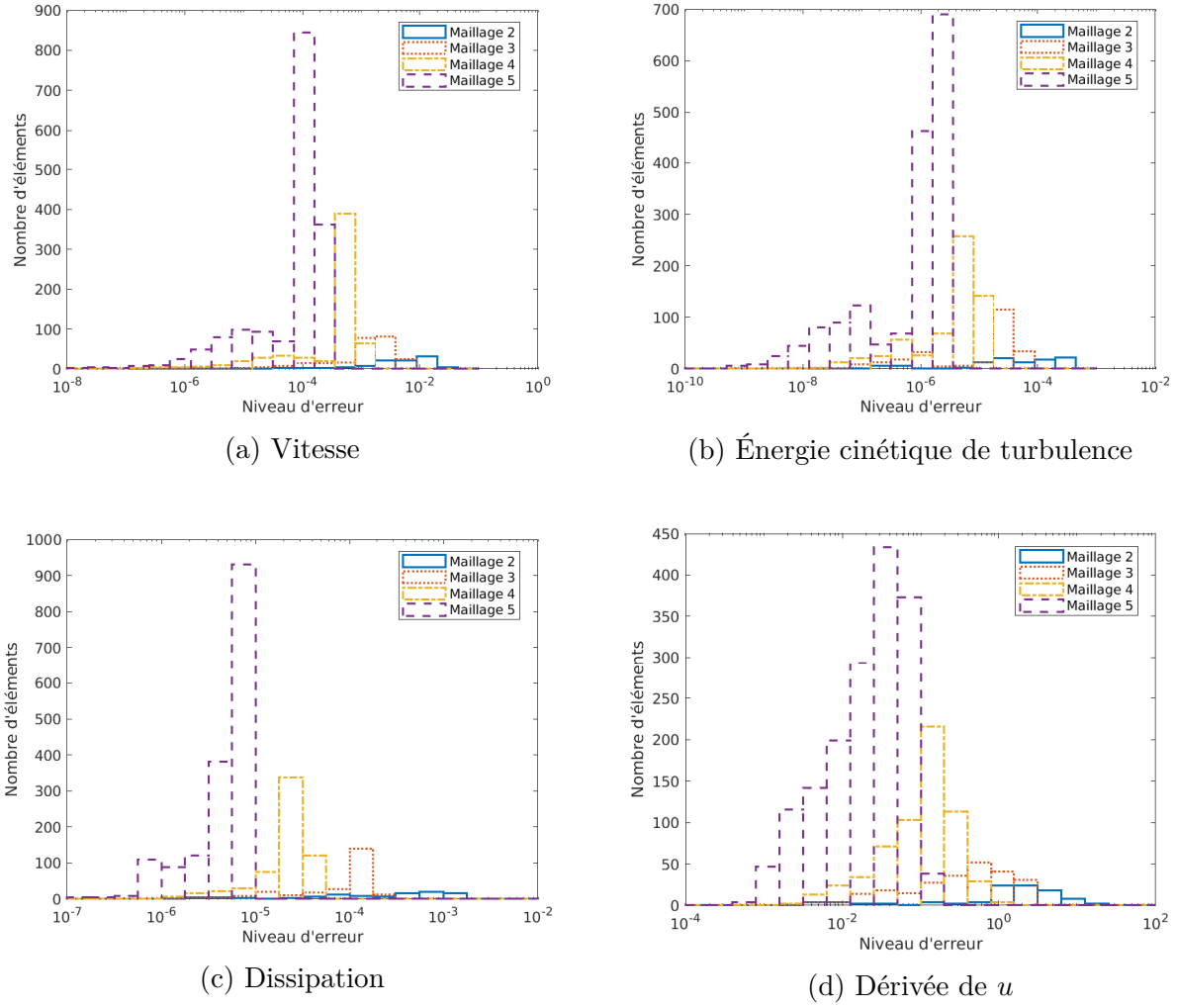


Figure 5.5 Distribution de l'erreur élémentaire sur maillages adaptatifs

Tableau 5.2 Comparaison de l'erreur estimée sur des maillages adaptatifs et non-adaptatifs

	Nb. nœuds	Erreur en norme H^1			
		u	k	ϵ	w
Distribution analytique	1001	2.35×10^{-2}	4.16×10^{-4}	1.85×10^{-3}	1.11×10^1
Maillage adaptatif	349	2.29×10^{-2}	2.72×10^{-4}	1.16×10^{-3}	8.35×10^0
Maillage adaptatif (extrap.)	1001	7.98×10^{-3}	9.48×10^{-5}	4.05×10^{-4}	2.91×10^0

5.1.3 Test de raccordement

On souhaite à présent vérifier les lois de paroi compatibles, par un test de raccordement. Ceci consiste à résoudre un écoulement en considérant successivement différentes distances de raccordement d pour la loi de paroi. Puisque les lois de paroi adaptatives sont supposées être applicables peu importe la distance de raccordement, on s'attend à ce que toutes les solutions se superposent peu importe la valeur de d . De surcroît, les solutions devraient se superposer à la solution obtenue par intégration jusqu'à la paroi.

Un écoulement de Couette sans gradient de pression est modélisé en 1D tel qu'illustré à la figure 5.6. Les conditions limites aux frontières inférieure et supérieure sont données par la loi de paroi compatible, sauf dans le cas $d = 0$, où il s'agit plutôt d'intégration jusqu'à la paroi avec les conditions limites correspondantes : $u = u_{\text{paroi}}$, $k = 0$, $\epsilon = 0$. On calcule une série de solutions en fixant d aux valeurs données au tableau 5.3 et en utilisant dans tous les cas le même tableau de données de loi de paroi compatible, généré tel qu'en 5.1.2. Le processus d'adaptation de maillage décrit précédemment permet d'assurer d'avoir des maillages suffisamment fins peu importe d .

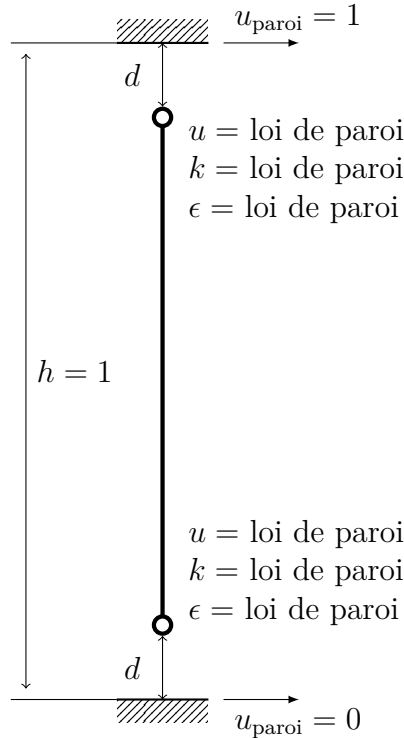


Figure 5.6 Modélisation 1D d'un écoulement de Couette

Tableau 5.3 Valeurs de distance de raccordement

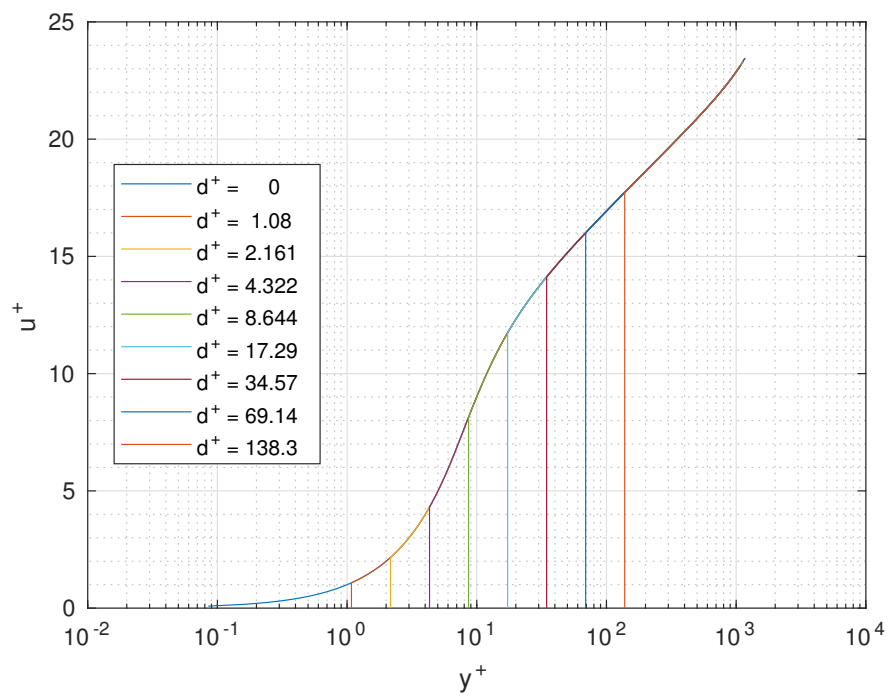
d	d^+
0	0
0.0005	1.080
0.001	2.161
0.002	4.322
0.004	8.644
0.008	17.29
0.016	34.57
0.032	69.14
0.064	138.3

La figure 5.7 illustre les profils adimensionnels de la solution, calculés en variant le paramètre de distance de la loi de paroi. La solution à $d = 0$ représente l'intégration du modèle jusqu'à la paroi. Pour toutes les variables et pour tout d , les profils se superposent à celui correspondant à l'intégration jusqu'à la paroi. En d'autres mots, la solution dans tout le domaine est indépendante de la distance de raccordement. Ceci vérifie l'implémentation des lois de paroi compatibles.

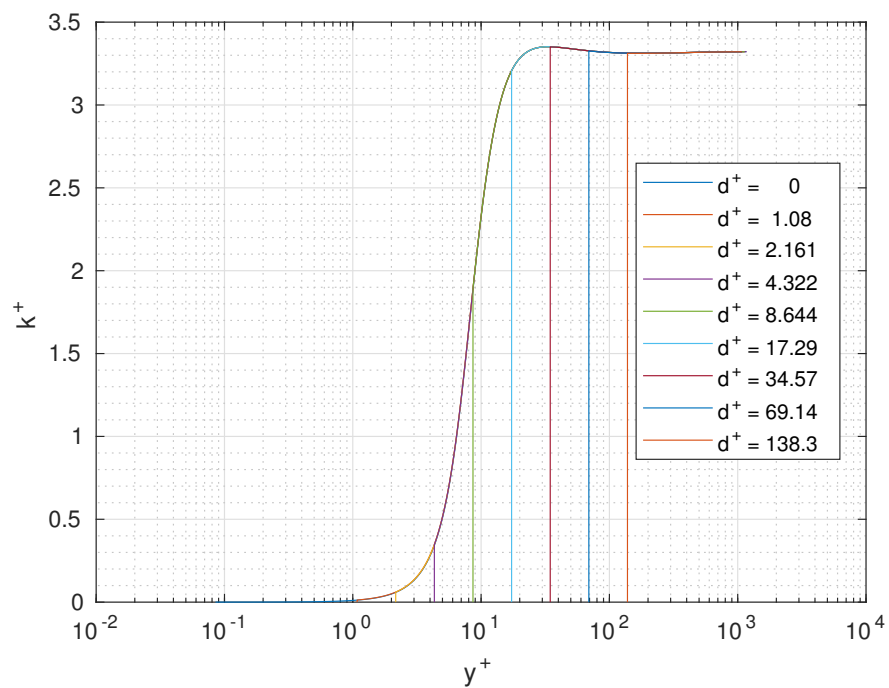
L'indépendance par rapport à la distance de raccordement est un aspect particulièrement intéressant des lois de paroi consistantes. Puisque toutes les solutions se superposent à la solution intégrée jusqu'à la paroi, même avec une distance de raccordement relativement grande, alors on peut obtenir des résultats de simulation aussi précis avec un maillage de loi de paroi (relativement grossier) qu'en intégrant jusqu'à la paroi avec un maillage très fin. Les lois de paroi consistantes représentent donc une économie de coût de calcul sans perte de précision.

Notons également au tableau 5.3 que doubler la distance de raccordement d double presque exactement d^+ . Ceci indique que toutes les simulations prédisent le même cisaillement à la paroi. Les lois de parois standard ne se comportent pas aussi bien. En effet, changer d pour une loi de paroi standard peut faire en sorte de prédire un cisaillement pariétal différent, ainsi d^+ ne varie pas linéairement avec d .

D'ailleurs, les résultats obtenus en raccordant dans la zone tampon sont parfaitement consistants avec les résultats obtenus en raccordant dans les régions linéaire et logarithmique. Ceci indique effectivement que les conditions limites sont compatibles avec le modèle de turbulence et demeurent consistantes indépendamment de la valeur de d^+ .

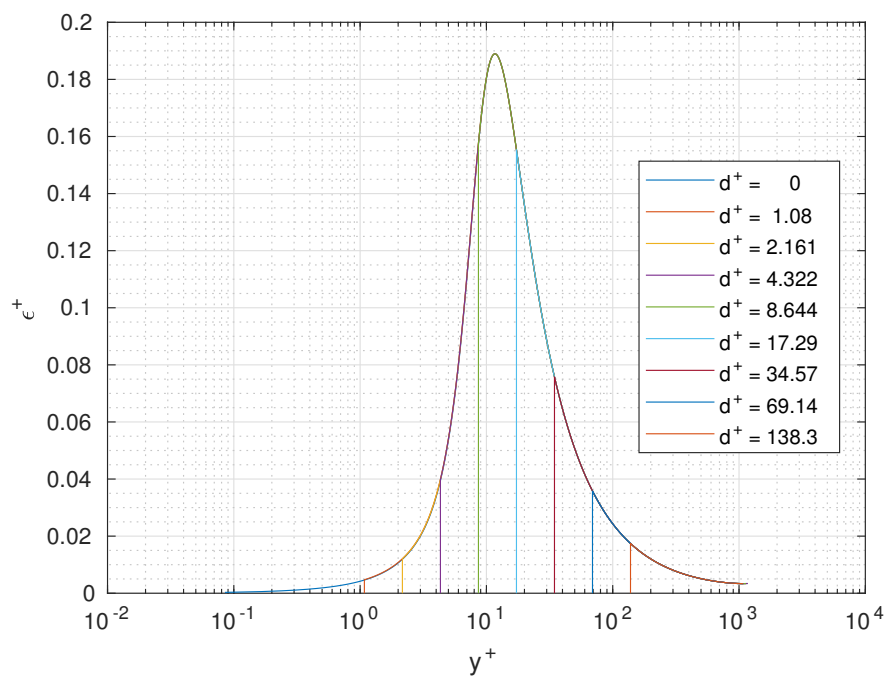


(a) Vitesse

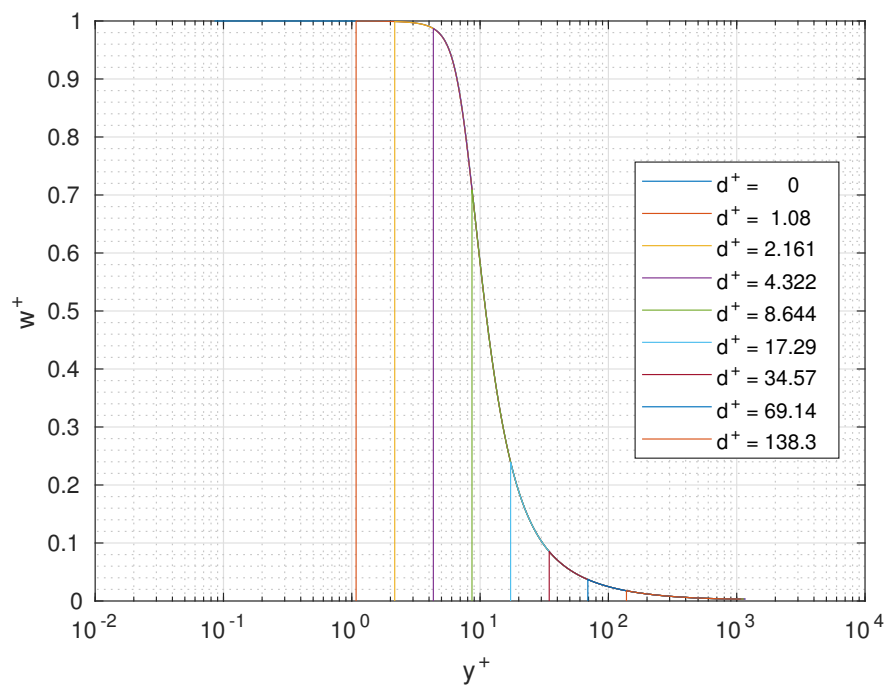


(b) Énergie cinétique

Figure 5.7 Profils adimensionnels de la solution du problème de Couette 1D avec lois de paroi adaptatives (les lignes verticales indiquent la distance de raccordement)



(c) Dissipation



(d) Dérivée de la vitesse

Figure 5.7 (suite) Profils adimensionnels de la solution du problème de Couette 1D avec lois de paroi adaptatives (les lignes verticales indiquent la distance de raccordement)

5.1.4 Comparaison avec des données de DNS

On s'intéresse ici à un écoulement de Couette sans gradient de pression, à un nombre de Reynolds $Re_\tau = \delta u_\tau / \nu = 500$. Nous modélisons cet écoulement dans CL1D avec le modèle de turbulence de Launder-Sharma en intégrant jusqu'à la paroi et comparons notre solution aux données DNS de Lee et Moser [40] pour leur solution notée $L_x = 100\pi$.

Remarque La variable de dissipation ϵ dont il est ici question constitue bien la dissipation ϵ et non sa transformée $\tilde{\epsilon}$ dont on a précédemment omis le tilde pour alléger l'écriture. Ceci est mis en évidence par la valeur non-nulle de ϵ à la paroi, alors que la condition limite imposée dans CL1D est $\tilde{\epsilon} = 0$.

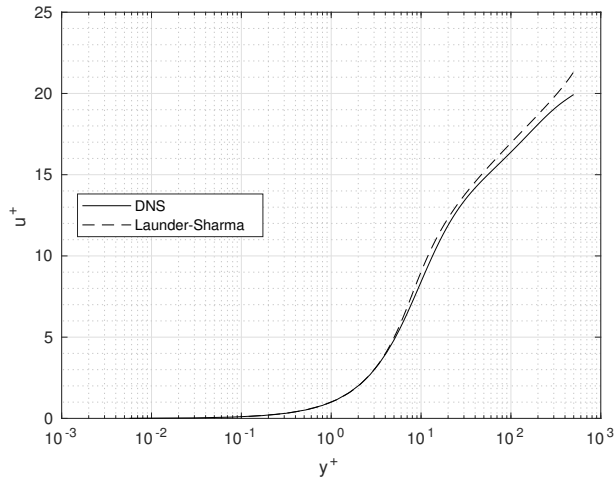
La figure 5.8 illustre les profils adimensionnels en fonction de y^+ . Le profil de vitesse du modèle de Launder-Sharma est en assez bon accord avec les résultats de DNS. Un léger écart apparaît dans la zone logarithmique. On peut expliquer cet écart en observant la figure 5.8d, où il y a un léger écart entre les dérivées de u calculées près de $y^+ = 10$. De part et d'autre de cette région, les dérivées sont presque confondues, donnant donc un écart environ constant entre les profils de vitesse. Généralement, l'accord entre les courbes est très bon.

Le profil d'énergie cinétique marque deux différences importantes par rapport aux données de DNS. On note un délai avant le point où k^+ se met à croître, respectivement à environ $y^+ = 1$ et $y^+ = 5$. Également, le comportement au-delà du pic maximum est différent. La solution de CL1D prédit une valeur environ constante de k dans la région logarithmique, alors que le calcul DNS montre une décroissance marquée. Dans les deux cas, le maximum est environ à la même abscisse. L'accord entre les courbes est satisfaisant.

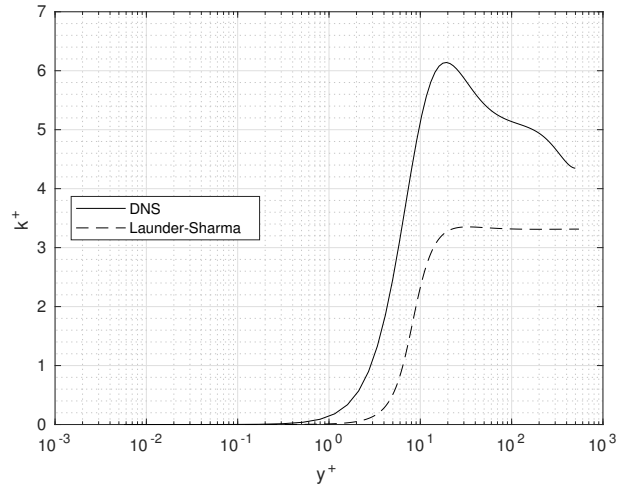
Les profils de dissipation sont très différents. Si l'accord est bon dans la région logarithmique et même un peu avant, le comportement dans la sous-couche visqueuse est radicalement différent. La simulation avec CL1D prévoit la croissance de ϵ à partir de la paroi ($y^+ = 0$) jusqu'à un maximum à environ $y^+ = 10$, alors que les données DNS montrent plutôt une décroissance avec une perturbation en $y^+ = 10$. De plus, les valeurs à la paroi sont très différentes.

Comme pour la vitesse, la dérivée de la vitesse approche bien les données DNS. Un léger écart apparaît au début de la zone tampon mais est rattrapé lorsque y^+ augmente. Ceci se traduit par des profils pratiquement parallèles mais décalés à la figure 5.8a.

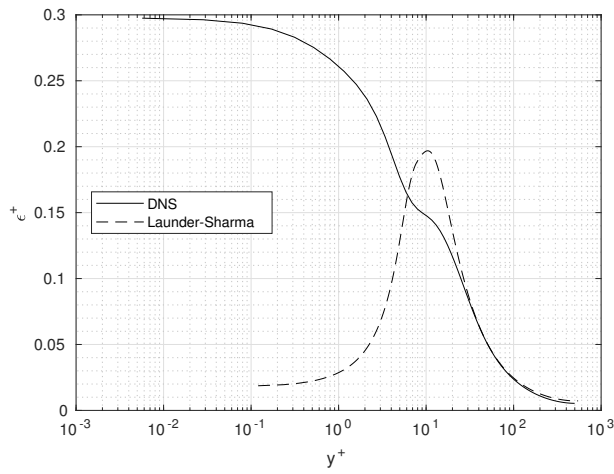
Notons que nos résultats sont en assez bon accord avec ceux de Michelassi *et al.* [41], qui comparent également des données DNS en canal plan à des simulations RANS avec modèles $k-\epsilon$ à bas Reynolds, dont le modèle Launder-Sharma. Leurs résultats avec le modèle de Launder-Sharma présentent les mêmes tendances que les nôtres comparativement aux données DNS.



(a) Vitesse



(b) Énergie cinétique de turbulence



(c) Dissipation

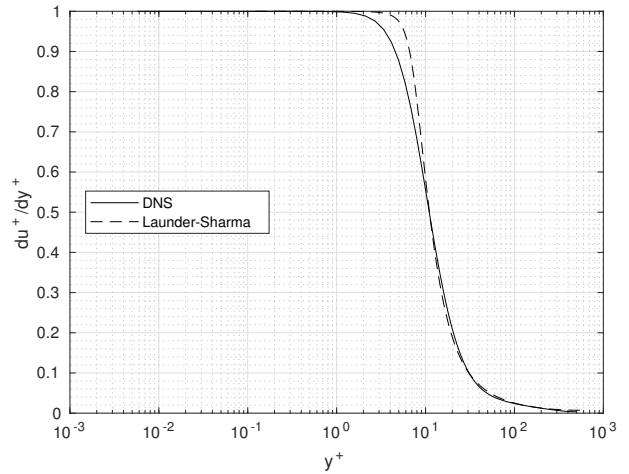
(d) Dérivée de u

Figure 5.8 Comparaison des résultats de DNS et sous CL1D

Ceci suggère effectivement que ce modèle peine à reproduire des résultats de DNS en canal. Notons toutefois que l’application du modèle à un écoulement en canal ne sert qu’à produire des lois de paroi compatibles avec le modèle de turbulence, ce qui justifie son usage dans le cadre 1D.

5.2 Applications bidimensionnelles

L’implémentation unidimensionnelle étant satisfaisante, on considère à présent des applications en 2D, en commençant avec des cas simples, suivis d’écoulements complexes.

Un cas de vérification du solveur est d’abord exécuté. Ensuite, un test de raccordement est effectué en employant les tableaux de données provenant de CL1D. Finalement, des cas d’intérêt pratique sont mis en marche ; on considère le cas d’une couche limite sur une plaque plane et celui de la marche descendante.

5.2.1 Vérification de CADYF par la méthode des solutions manufacturées

Afin de vérifier l’implémentation du modèle Launder-Sharma dans CADYF, une solution manufacturée est également utilisée en 2D. La solution manufacturée choisie est inspirée de celle présentée par Eça *et al.* [42]. Elle s’apparente à une couche limite se développant le long d’une plaque plane. La solution retenue est celle du modèle k - ϵ standard pour \mathbf{u} , k et ϵ . Originellement, c’est la viscosité turbulente qui est fixée et ϵ qui en découle. Or, pour le modèle de Launder-Sharma, la dépendance résultante serait implicite puisque μ_t dépend du nombre de Reynolds turbulent local, lequel se calcule à partir de ϵ . C’est donc la dissipation que nous fixons, et le profil de μ_t est différent de celui prescrit par les auteurs. Cette modification n’a pas d’influence sur le processus de vérification.

Également, nous introduisons une nouvelle variable pour le relèvement de la vorticité. Celle-ci est calculée exactement à partir des champs de u et v . Aucun terme source ne s’ajoute donc à l’équation de ω_z .

Ainsi, la solution manufacturée est donnée par les fonctions ci-dessous et les constantes du tableau 5.4.

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{\sigma y}{x} & \eta_\nu &= \frac{\sigma_\nu y}{x} \\ u(x, y) &= \text{erf}(\eta) & v(x, y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} (1 - e^{-\eta^2}) & \omega_z(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ p(x, y) &= \frac{1}{2} \ln(2x - x^2 + 0.25) \ln(4y^3 - 3y^2 + 1.25) \\ k(x, y) &= k_{\max} \eta_\nu^2 e^{1-\eta_\nu^2} + k_0 & \epsilon(x, y) &= 0.36 \frac{k_{\max}^2}{\nu_{\max}} e^{-\eta_\nu^2} + \epsilon_0\end{aligned}$$

Tableau 5.4 Paramètres de la solution manufacturée 2D

Paramètre	ρ	μ	σ	σ_ν	k_{\max}	k_0	ϵ_0	ν_{\max}
Valeur	1	$\frac{1}{10^6}$	4	2.5σ	0.01	0.00001	0.001	$10^3\nu$

Le domaine de calcul est illustré à la figure 5.9 et les conditions limites imposées sont données au tableau 5.5. Les valeurs « **exact** » correspondent aux valeurs ou flux exacts de la solution manufacturée. Nous utilisons une série de maillages adaptatifs. Afin d'illustrer, la figure 5.10 illustre le maillage de départ ainsi qu'un maillage intermédiaire. Certaines caractéristiques de l'écoulement sont mises en évidence par la concentration des éléments, notamment près de la paroi et au bord de la couche limite.

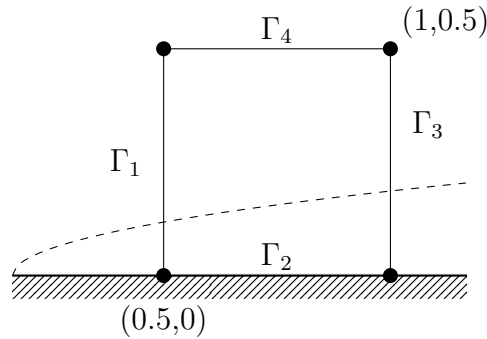
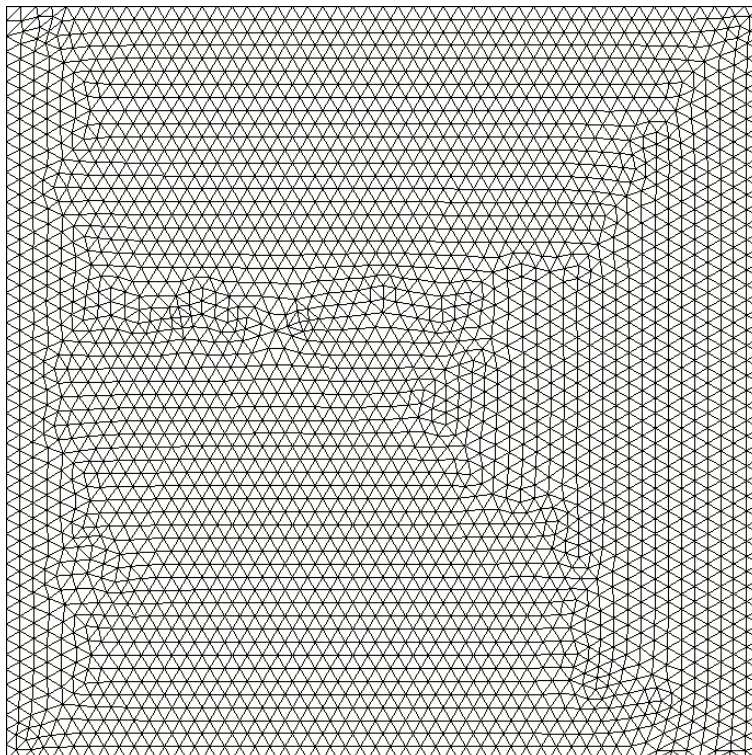
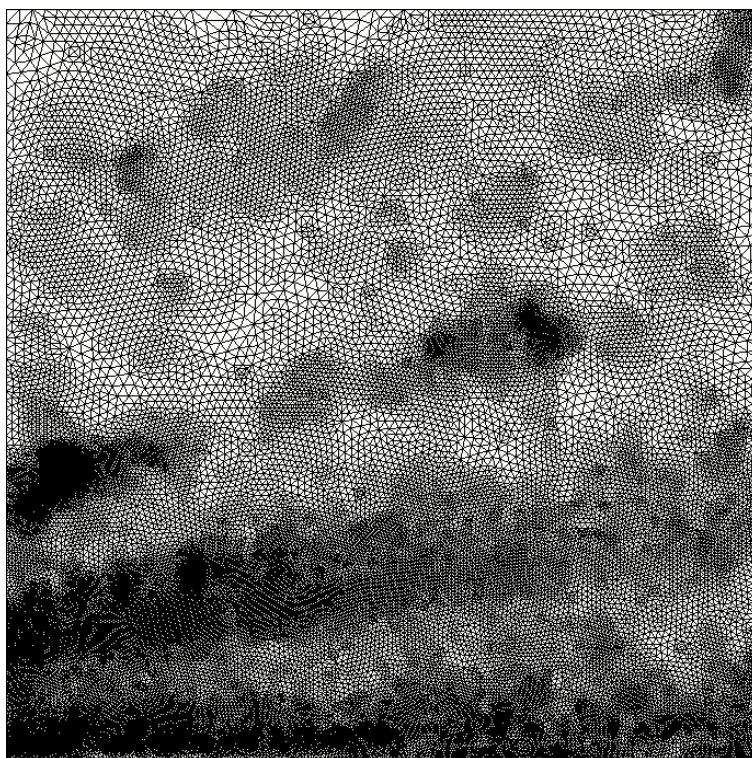


Figure 5.9 Modélisation de la solution manufacturée

Puisque les conditions limites sont imposées à la paroi, ce cas permet de vérifier l'intégration jusqu'à la paroi, contrairement à l'approche de loi de paroi normalement employée avec le modèle k - ϵ standard. L'intégration à la paroi est rendue possible par l'ajout de k_0 et ϵ_0 pour que les variables de turbulence soient non-nulles à la paroi.



(a) Maillage initial (cycle 00)



(b) Maillage intermédiaire (cycle 03)

Figure 5.10 Maillages pour la solution manufacturée

Tableau 5.5 Conditions limites de la solution manufacturée

Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4
$u = \text{Exact}$	$u = \text{Exact}$	$u = \text{Exact}$	$(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \text{Exact}$
$v = \text{Exact}$	$v = \text{Exact}$	$v = \text{Exact}$	$-p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial y} = \text{Exact}$
$k = \text{Exact}$	$k = \text{Exact}$	$k = \text{Exact}$	$(\mu + \mu_t) \frac{\partial k}{\partial y} = \text{Exact}$
$\epsilon = \text{Exact}$	$\epsilon = \text{Exact}$	$\epsilon = \text{Exact}$	$(\mu + \mu_t) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \text{Exact}$

Pour ce cas, nous ne considérons que des éléments de Taylor-Hood, utilisant des interpolants linéaires en pression et quadratiques pour les autres variables. Les calculs sont d'abord présentés en utilisant la stabilisation *Streamline Upwind Petrov Galerkin* (SUPG), puis la discrétisation de Galerkin.

Les graphes d'erreur pour chacune des variables sont présentés aux figures 5.11 en SUPG et 5.12 en Galerkin. Les normes d'erreur utilisées (c.f. section 2.4.2) sont la norme énergie pour \mathbf{u} , la semi-norme H^1 pour \mathcal{K} , \mathcal{E} et μ_t , et la norme L_2 pour p . Notons qu'à l'instar du cas 1D, on observe la convergence de l'erreur en fonction du nombre de nœuds N . Or, en 2D, h s'exprime comme

$$h \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$$

ainsi l'ordre de convergence exprimé en h est le double de celui exprimé en N . Les droites de référence sur les graphes 1D (Figure 5.2) et 2D n'ont donc pas la même pente. Les taux de convergence sont visibles sur les graphiques par comparaison avec les droites de référence, et sont également relevés au tableau 5.6, pour les deux schémas de discrétisation. Tous les taux donnés sont exprimés en h comme $\mathcal{O}(h^p)$.

Tableau 5.6 Ordres de convergence de l'erreur

	SUPG					Galerkin				
	\mathbf{u}	\mathcal{K}	\mathcal{E}	p	μ_t	\mathbf{u}	\mathcal{K}	\mathcal{E}	p	μ_t
Err. estimée	1.263	2.041	2.274	2.328	2.022	1.929	2.462	3.226	2.436	2.313
Err. exacte	1.269	2.050	2.259	2.369	2.028	1.906	2.468	3.199	2.547	2.329

Pour la pression, l'ordre de convergence en norme L_2 est de 2. C'est ce qu'on attend pour des interpolants linéaires en pression. Le taux de convergence pour les variables de turbulence en semi-norme H^1 est quadratique, ce qui est conforme au taux théorique. Le taux observé pour la norme énergie est cependant inférieur au taux quadratique attendu. Il est presque

linéaire en employant la stabilisation SUPG mais se rapproche de l'ordre 2 en Galerkin. Cette observation suggère un problème potentiel concernant la stabilisation des équations.

Avec la discrétisation de Galerkin, le taux de convergence pour l'erreur sur la vitesse est amélioré et atteint presque le taux théorique de 2. On note aussi que ϵ est superconvergent sans la stabilisation, bien qu'il ne soit pas clair pourquoi. Les indices d'efficacité sont également affectés par le retrait de la stabilisation. Alors que les indices d'efficacité relevés en SUPG varient considérablement, ceux sans stabilisation se comportent mieux (variation plus lisse). On observe toutefois une dégradation marquée pour l'indice d'efficacité de la pression. Ceci se traduit par un écart important entre l'erreur estimée et l'erreur exacte. Heureusement, la pression ne sert pas à l'adaptation de maillage, ainsi la faible efficacité de l'estimateur n'a pas d'impact sur la solution.

La présente solution manufacturée a été testée dans 8 cas : en variant entre des maillages adaptatifs ou réguliers, en projetant les flux ou les dérivées de la solution¹, et en Galerkin ou SUPG. Les ordres de convergence pour chacun des cas sont donnés à l'annexe B. Dans chacun des cas, la stabilisation SUPG entraîne une dégradation de l'ordre de convergence comparativement à Galerkin. Il y a donc vraisemblablement une perte d'un ordre de précision sur la vitesse engendrée par la stabilisation SUPG telle qu'implémentée. La nature de cette perte de précision ne nous est pas connue, mais les essais en cours par d'autres étudiants du laboratoire semblent mettre en cause la pression.

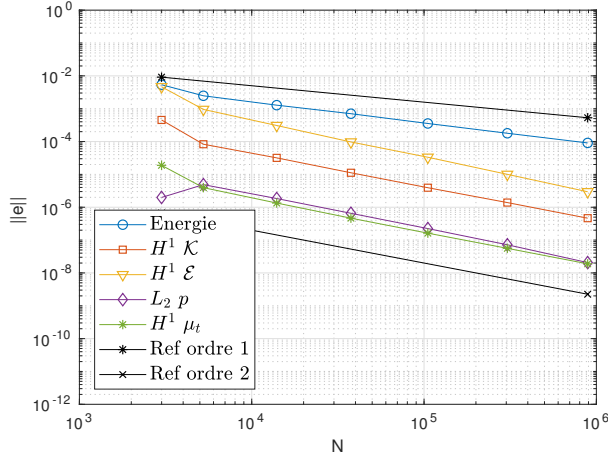
Dans l'ensemble, bien que la stabilisation SUPG engendre une dégradation de la précision, on retient que le solveur résout effectivement les équations du modèle. En ce sens, nous pouvons considérer qu'une solution convergée en maillage représente bel et bien une solution au système d'équations (2.1, 3.21).

5.2.2 Test de raccordement

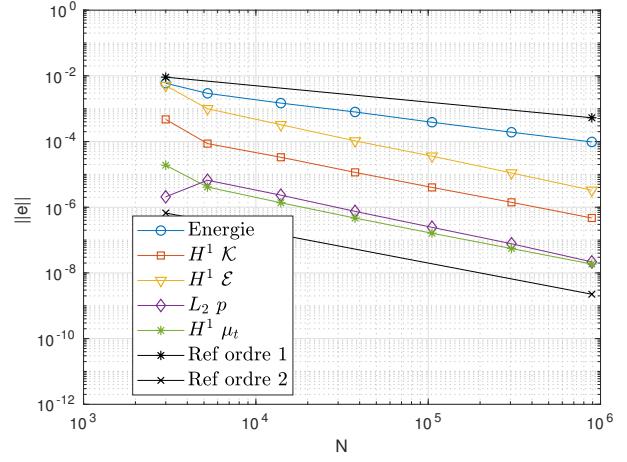
Les tests de raccordement dans CODYF ont deux objectifs. Le premier est identique au cas 1D, soit de vérifier que les solutions obtenues sont indépendantes de la distance de raccordement. Le second, supplémentaire, est de faire la contre-vérification des deux solveurs, c'est-à-dire de vérifier que les deux donnent la même solution au même problème.

Les tests sont faits en considérant le domaine illustré à la figure 5.14 et en variant la distance de raccordement d tel qu'indiqué au tableau 5.7. Puisque CODYF ne supporte pas les lois de paroi en vitesse relative, la paroi du haut ne peut pas être modélisée. Pour contourner cette restriction, un demi-écoulement de Couette est modélisé, exploitant la symétrie de la solution.

1. Voir l'équation (2.16) à la page 22 et la remarque associée.

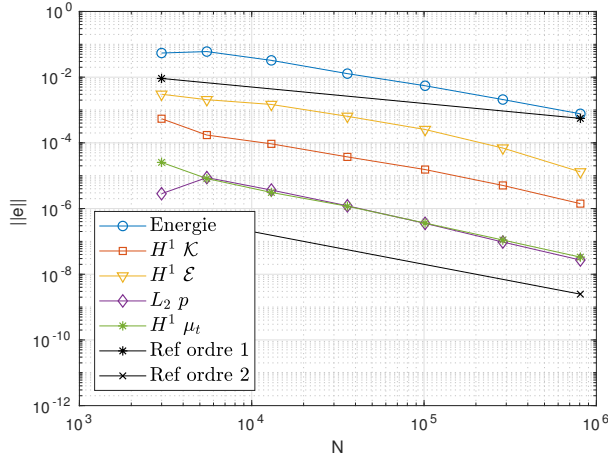


(a) Erreur estimée

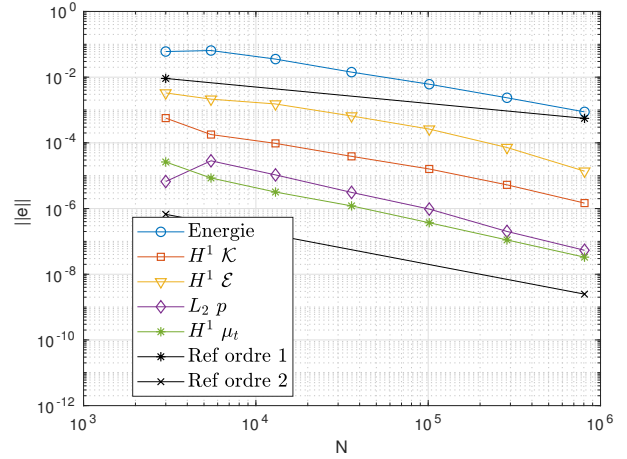


(b) Erreur exacte

Figure 5.11 Erreur de la solution manufacturée avec stabilisation SUPG



(a) Erreur estimée



(b) Erreur exacte

Figure 5.12 Erreur de la solution manufacturée en discrétisation de Galerkin

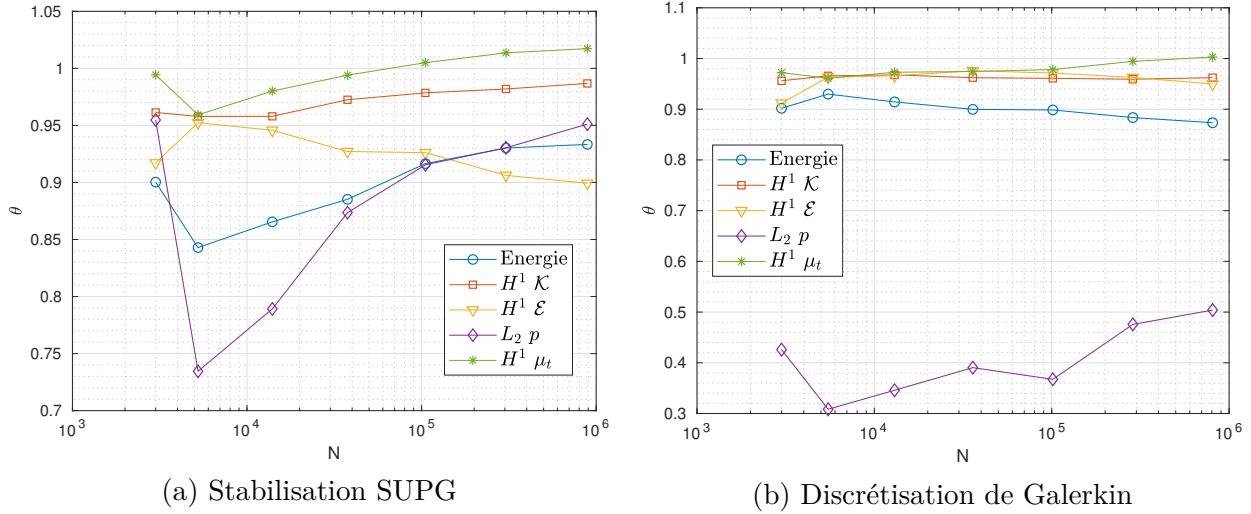


Figure 5.13 Indices d'efficacité pour la solution manufacturée

Ceci est fait en imposant au point de symétrie, $u = \frac{1}{2}$ et des dérivées nulles pour k et ϵ . Les conditions limites dites « libre » correspondent à la condition limite naturelle homogène.

Tableau 5.7 Valeurs de distance de raccordement

d	d^+
0	0
0.0005	1.077
0.001	2.155
0.002	4.312
0.004	8.625
0.008	17.26
0.016	34.51
0.032	69.03
0.064	138.1

Le cas particulier d'intégration à la paroi ($d = 0$) n'est pas présentement disponible dans CADYF. En effet, l'intégration à la paroi est particulièrement difficile au niveau de la préservation de la positivité des variables de turbulence. Afin d'assurer la positivité, les tests sont effectués avec la formulation logarithmique des variables de turbulence. Cette formulation est incompatible avec les conditions limites bas-Reynolds à la paroi puisque les logarithmes de k et ϵ y tendent vers $-\infty$. Ainsi, CADYF supporte les modèles de turbulence à bas-Reynolds, mais uniquement dans l'approche de loi de paroi compatible. C'est la solution 1D obtenue par CL1D pour le même problème qui permet d'illustrer la solution correspondant à l'intégration jusqu'à la paroi.

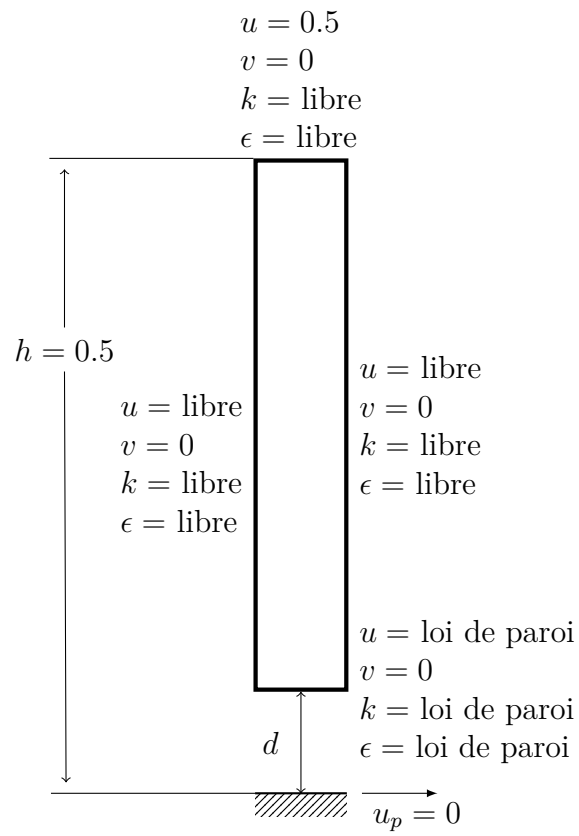


Figure 5.14 Modélisation 2D d'un demi-écoulement de Couette

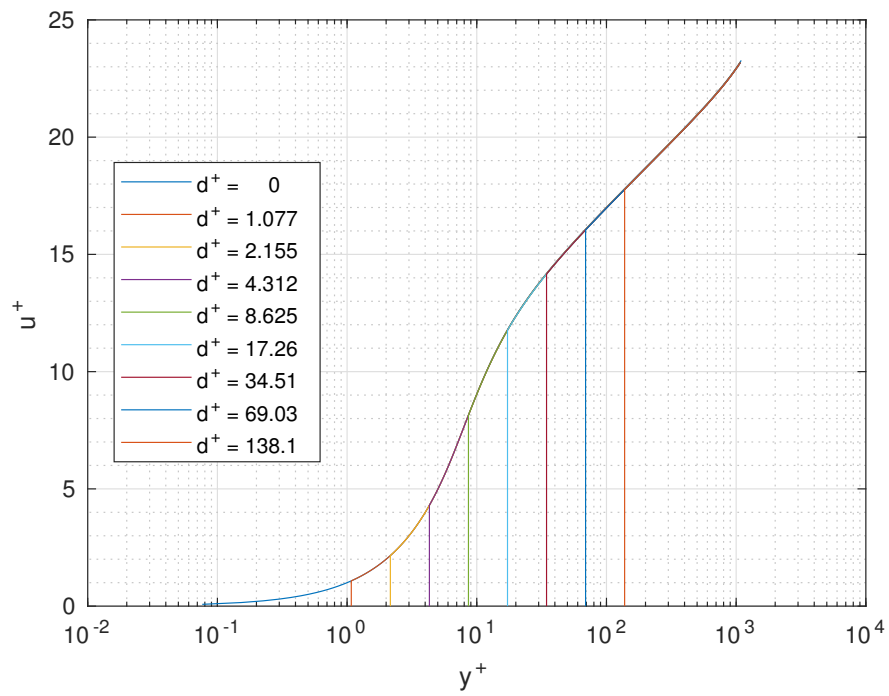
La figure 5.15 illustrent les profils des variables de la solution. Dans tous les cas, les profils se superposent, indiquant l'indépendance par rapport à la distance de raccordement, comme dans le cas 1D.

La figure 5.16 illustre une vue rapprochée du raccordement de k (dimensionnel). Comme on peut le constater, il existe en fait un léger écart entre les solutions, quoique de l'ordre de 10^{-6} . Notons toutefois que la condition limite pour k à la paroi est une condition de Neumann. On admet alors une variation de la valeur de k dans la mesure où le flux imposé au bord est le même. On voit bien ici que la dérivée est effectivement préservée pour les deux cas se raccordant dans la zone illustrée. De plus, toutes les solutions préservent la position du maximum de k , indiquant que la condition limite de Neumann n'affecte pas significativement le comportement de k .

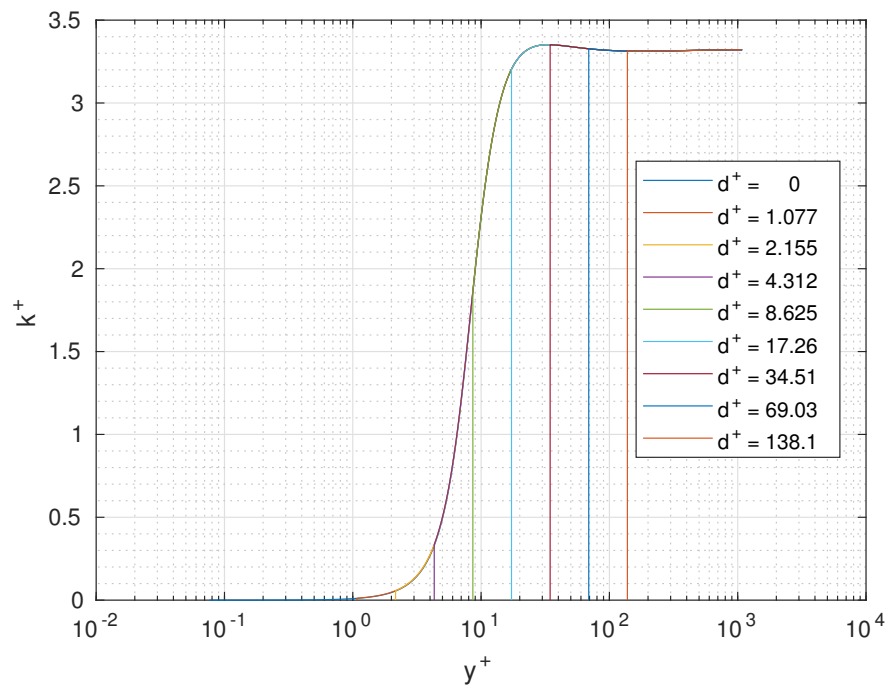
Dans tous les cas, les profils se superposent à la solution de référence, indiquant que la solution avec loi de paroi compatible reproduit fidèlement la solution avec intégration jusqu'à la paroi. Également, les valeurs de d^+ obtenus (tableaux 5.3 et 5.7) sont très similaires dans les deux cas, avec environ 0.2% d'erreur. Cette différence s'explique par la différence de maillage entre les solveurs et par une différence d'implémentation de l'interpolation dans le tableau de données de la loi de paroi. Le solveur CL1D utilise une interpolation linéaire alors que CADYF utilise des splines cubiques. Ainsi, l'objectif de contre-vérification est atteint ; les deux solveurs donnent la même solution au même problème.

Les deux objectifs de vérification sont atteints. La solution est effectivement indépendante de la distance de raccordement, et les solutions de CL1D et CADYF sont superposées. Ainsi, on en conclut que les lois de parois adaptatives sont implémentées correctement et que les deux solveurs résolvent (correctement) le même modèle.

Finalement, il faut retenir que ce cas de vérification ne permet pas de discuter de la précision des lois de paroi compatibles. En effet, il faudrait pour cela les appliquer à d'autres écoulements que celui qui a permis de générer le tableau en premier lieu. L'étude d'écoulements plus complexes est abordée dans les cas d'application qui suivent.

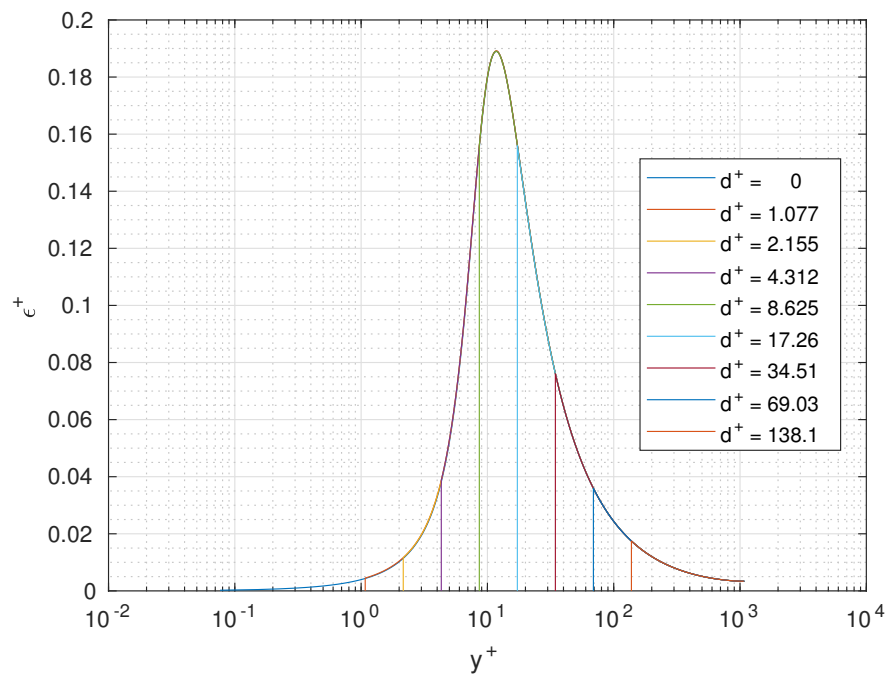


(a) Vitesse

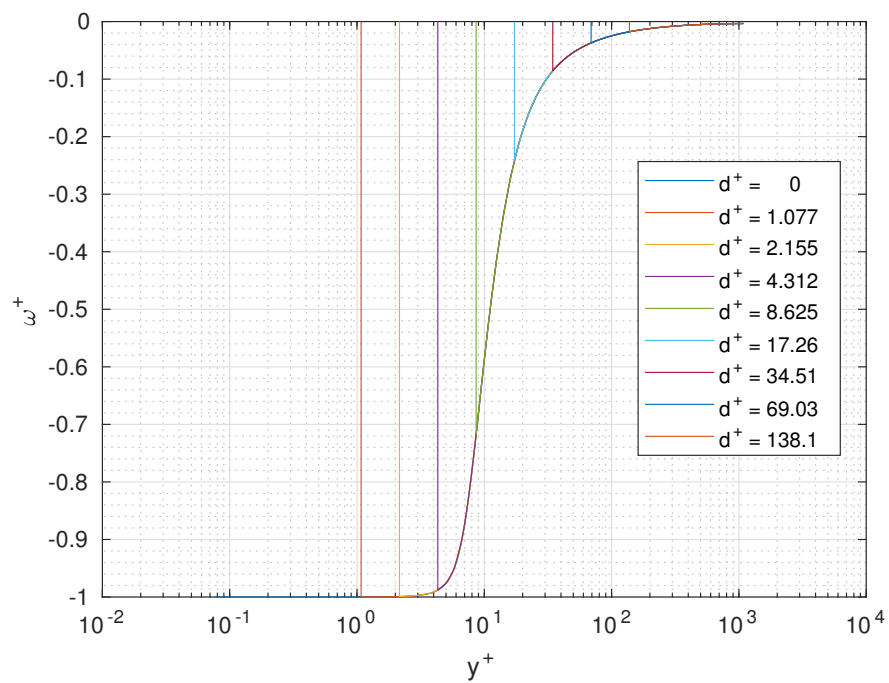


(b) Énergie cinétique

Figure 5.15 Profils adimensionnels de la solution du problème de Couette 2D avec lois de paroi adaptatives (les lignes verticales indiquent la distance de raccordement)



(c) Dissipation



(d) Vorticité

Figure 5.15 (suite) Profils adimensionnels de la solution du problème de Couette 2D avec lois de paroi adaptatives (les lignes verticales indiquent la distance de raccordement)

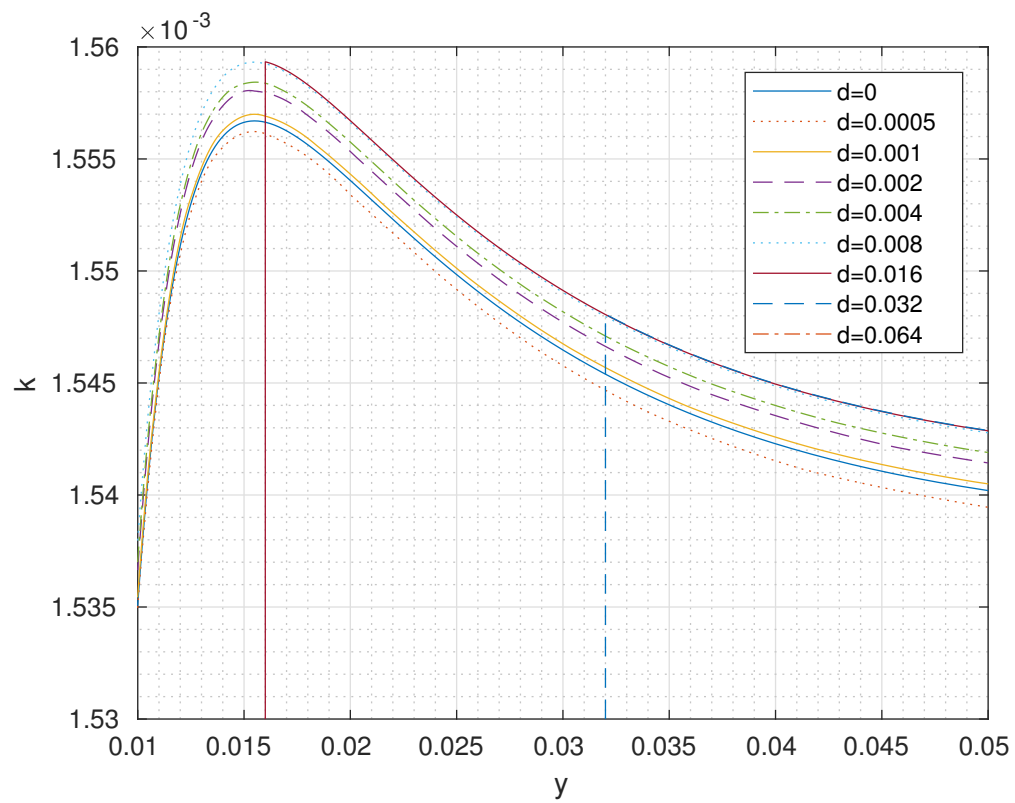


Figure 5.16 Vue rapprochée sur le raccordement de k (les lignes verticales indiquent la distance de raccordement)

5.2.3 Couche limite turbulente sur une plaque plane

La couche limite turbulente se développant sur une plaque plane est un cas test utilisé par la NASA [43] pour la validation des modèles de turbulence. Ce test peut être utilisé pour valider les prédictions du coefficient de frottement et de la vitesse, puisque l'on dispose de valeurs expérimentales et théoriques auxquelles se comparer.

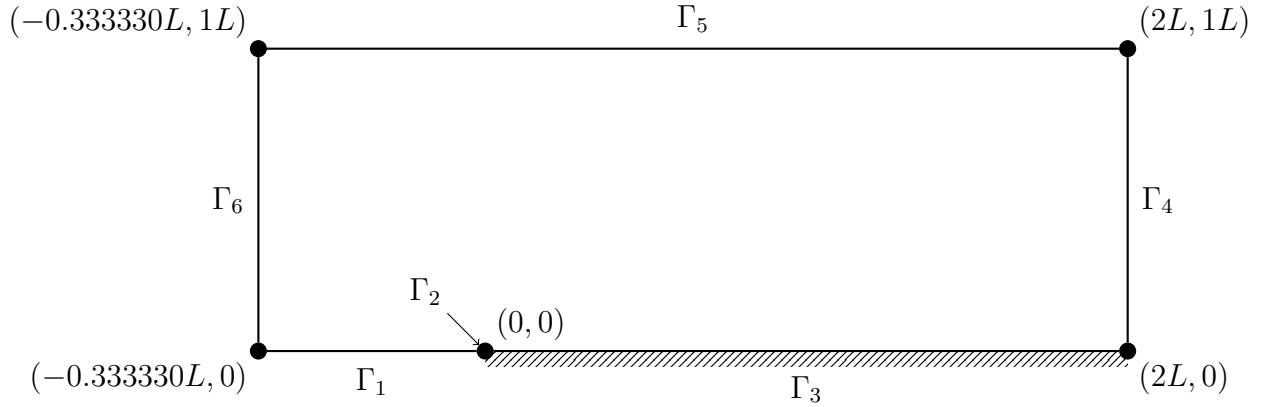


Figure 5.17 Modélisation de la plaque plane (pas à l'échelle)

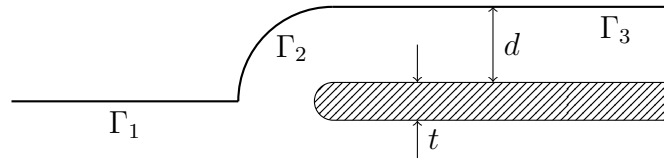


Figure 5.18 Modélisation du bord de la plaque plane

Le domaine de calcul est illustré aux figures 5.17 et 5.18 et emploie les conditions limites présentées au tableau 5.8. La géométrie est adimensionnée par L , soit le point sur la plaque où la NASA définit le nombre de Reynolds $Re_L = 5 \times 10^6$. Ce point est à la moitié de la plaque ; notons par conséquent que la plaque est de longueur $2L$. Pour atteindre le nombre de Reynolds spécifié, on pose $\rho = 1$ et $\mu = 1/Re_L$.

La NASA suggère une modélisation du domaine qui équivaut à omettre la frontière Γ_2 , donc à connecter les frontières Γ_1 et Γ_3 directement. Cependant, la figure 5.18 met en évidence le paramètre de distance de raccordement d de la loi de paroi. Si l'on éliminait l'arrondi Γ_2 , ceci reviendrait à déplacer la plaque sous le domaine de calcul, tel que discuté à la section 4.3. Ce déplacement n'est pas problématique en soi : c'est plutôt la condition de symétrie sur Γ_1 qui deviendrait erronée ! En effet, cette frontière ne constituerait plus le plan de symétrie de

Tableau 5.8 Conditions limites pour le calcul de la couche limite sur une plaque plane

Frontière	Conditions limites			
	u	v	k	ϵ
Symétrie Γ_1	$(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$	$v = 0$	$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} = 0$	$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0$
Nez Γ_2		Loi de paroi		
Plaque Γ_3		Loi de paroi		
Sortie Γ_4	$-p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$	$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} = 0$	$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0$
Haut Γ_5	$(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$	$-p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial y} = 0$	$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} = 0$	$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0$
Entrée Γ_6	$u = 1$	$v = 0$	$k = 0.00015$	$\epsilon = 0.001$

l'écoulement de part et d'autre de la plaque, et on devrait s'attendre à ce que du fluide la traverse. Alternativement, on note que l'arrondi s'élimine naturellement si $d = t = 0$, ce qui signifie qu'il faudrait intégrer jusqu'à la paroi (infiniment mince). Cette approche est incompatible avec les lois de paroi et la formulation logarithmique des variables de turbulence et doit donc être écartée. D'ailleurs, Lacasse *et al.* [44] montrent qu'un arrondi au bord d'attaque est nécessaire pour y former un point de stagnation, sans quoi la production turbulente ne s'active pas, donnant un comportement invalide.

Tableau 5.9 Paramètres de loi de paroi pour la plaque plane

d	Intervalle de d^+
0.0001 L	17–82
0.0002 L	35–191
0.0004 L	69–470

La solution est calculée en utilisant la loi de paroi consistante établie précédemment. Les paramètres de paroi sont donnés au tableau 5.9. Trois paramètres de distance sont testés. Ceci permet de qualifier l'effet de la distance de raccordement sur les prédictions.

Pour des fins de validation, la NASA suggère de valider la prédiction du coefficient de frottement c_f sur la plaque, défini par

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (5.2)$$

où τ_w est le cisaillement pariétal et U_∞ la vitesse « à l'infini », dans la région non affectée par la couche limite. Le coefficient de frottement est d'un grand intérêt en aérodynamique, notamment pour la prédiction de la traînée. Également, c_f est un paramètre calculé à la paroi. Il est donc justifié de le considérer à des fins de validation, puisque le voisinage de la plaque constitue la zone d'intérêt pour ce problème ainsi que la zone ayant le plus d'influence sur la solution.

Dans notre cas, le cisaillement est imposé par une loi de paroi compatible à deux échelles de vitesse. On impose le cisaillement à la frontière : $\tau_w = \rho u_\tau u_k$, ainsi le coefficient de frottement est mieux calculé :

$$c_f = \frac{2u_\tau u_k}{U_\infty^2} \quad (5.3)$$

Puisque cette forme utilise le cisaillement *imposé* comme condition limite, il s'agit d'une façon plus précise d'évaluer c_f que d'estimer le cisaillement avec la dérivée de u dans la direction normale à la paroi.

La NASA suggère pour la validation de comparer la prédiction du coefficient de frottement à des corrélations semi-empiriques existantes. Nous considérons donc trois corrélations :

La corrélation de loi de puissance de Prandtl [45]

$$c_f = \frac{0.058}{\text{Re}_x^{1/5}} \quad (5.4)$$

La corrélation de Shultz-Grunow [46]

$$c_f = \frac{0.370}{(\log(\text{Re}_x))^{2.584}} \quad (5.5)$$

La corrélation de White [45]

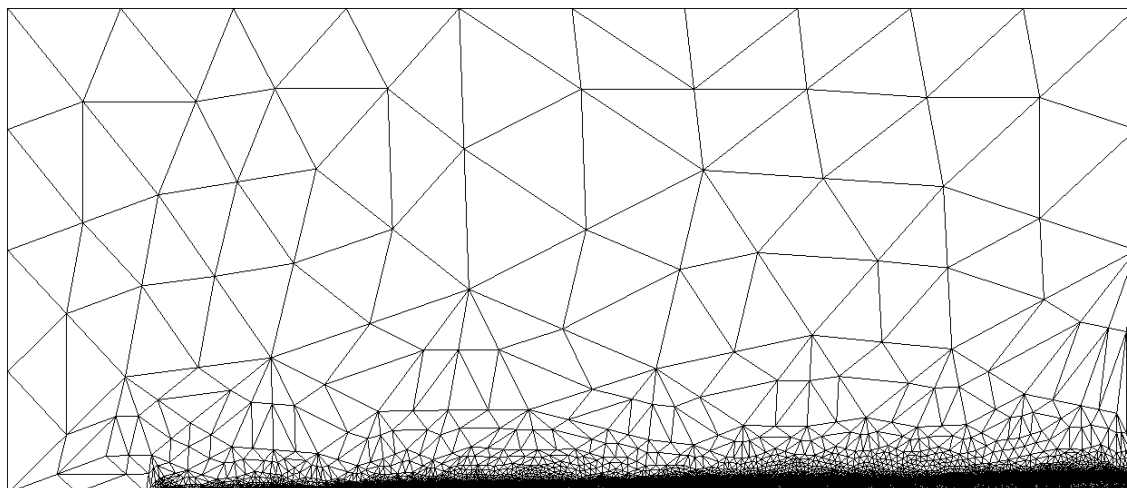
$$c_f = \frac{0.455}{\ln^2(0.06\text{Re}_x)} \quad (5.6)$$

Les figures 5.19 et 5.20 illustrent des maillages adaptatifs utilisés pour la résolution du cas $d = 0.0001$. On note que le maillage demeure grossier et change peu à l'extérieur de la couche limite et en amont de la plaque. Il est raffiné près du bord d'attaque, de la paroi solide, et du bord de la couche limite. On remarque aussi à l'inspection des figures 5.20b et 5.20c que le processus adaptatif raffine en premier près de la paroi avant de raffiner au bord de la couche limite. Ceci témoigne de l'importance de faire une étude de convergence en maillage pour s'assurer de bien capturer la physique du problème.

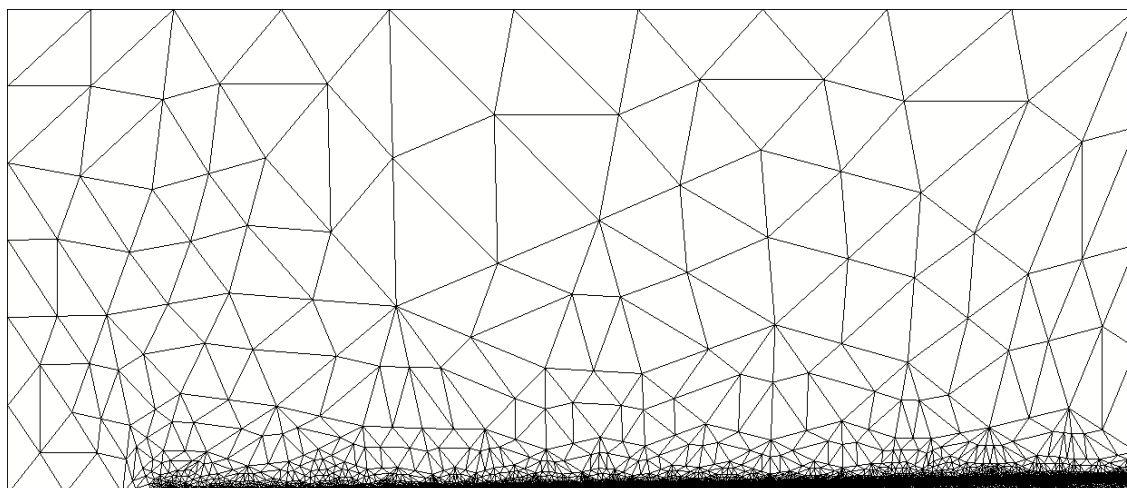
La figure 5.21a illustre la convergence de la distance de raccordement d^+ en raffinant le maillage dans le cas $d = 0.0002$. Comme on peut le constater, les premiers maillages présentent d'importantes oscillations. On note aussi que la prédiction change considérablement en raffinant le maillage lors des premiers cycles adaptatifs, et change très peu entre les 4^e et 5^e cycles. On note aussi que les oscillations disparaissent progressivement en adaptant le maillage. Au final, on considère que 5 cycles sont suffisants pour donner une solution convergée en maillage pour $d = 0.0004$ et $d = 0.0002$. Or, pour $d = 0.0001$, il a fallu un cycle de plus. En effet, lorsque le raccordement se fait dans la zone tampon plutôt que dans la zone logarithmique, plus de nœuds sont requis pour atténuer ces oscillations, demandant un cycle d'adaptation supplémentaire.

La figure 5.21b illustre la valeur prédite du coefficient de friction sur la plaque au cours du processus d'adaptation de maillage pour $d = 0.0004$. Puisque c_f et d^+ sont étroitement liés, on observe les mêmes tendances. On note que la solution est convergée en maillage tant pour d^+ que c_f .

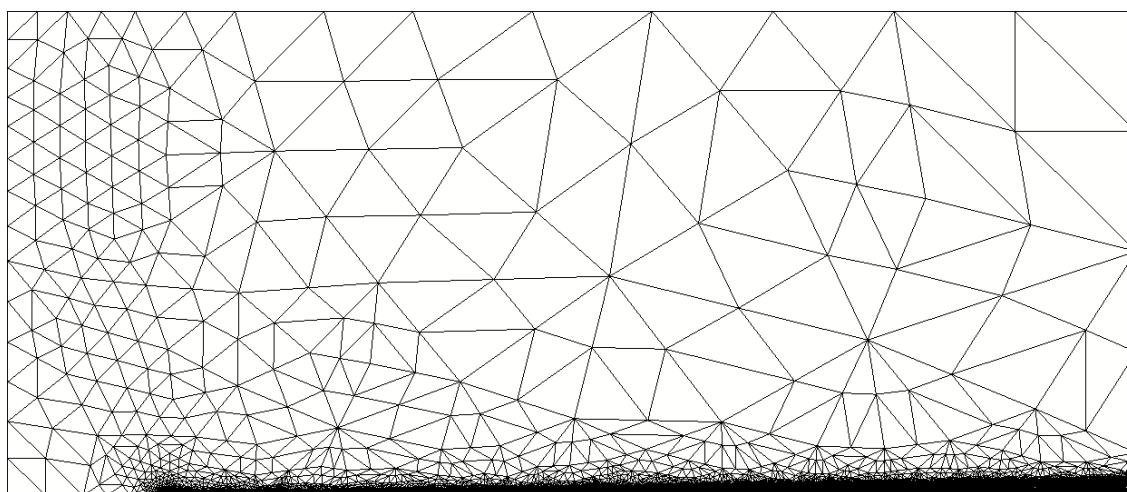
La figure 5.22 illustre le coefficient de frottement le long de la plaque obtenu sur le dernier maillage pour chacun des cas, ainsi que les corrélations (5.4–5.6). Les prédictions sont en bon accord avec les corrélations pour la seconde moitié de la plaque ($x/L > 1$), donc à haut



(a) Cycle 1

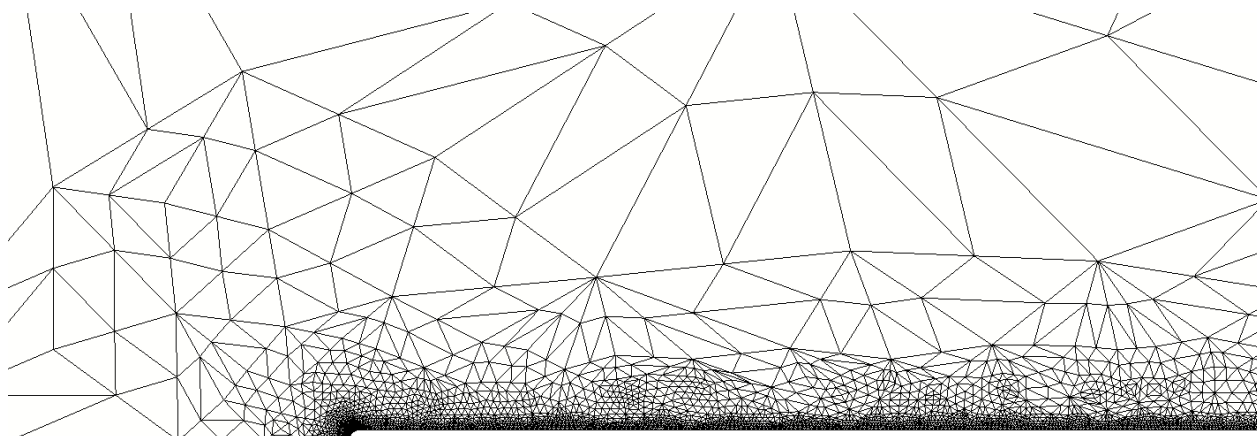


(b) Cycle 3

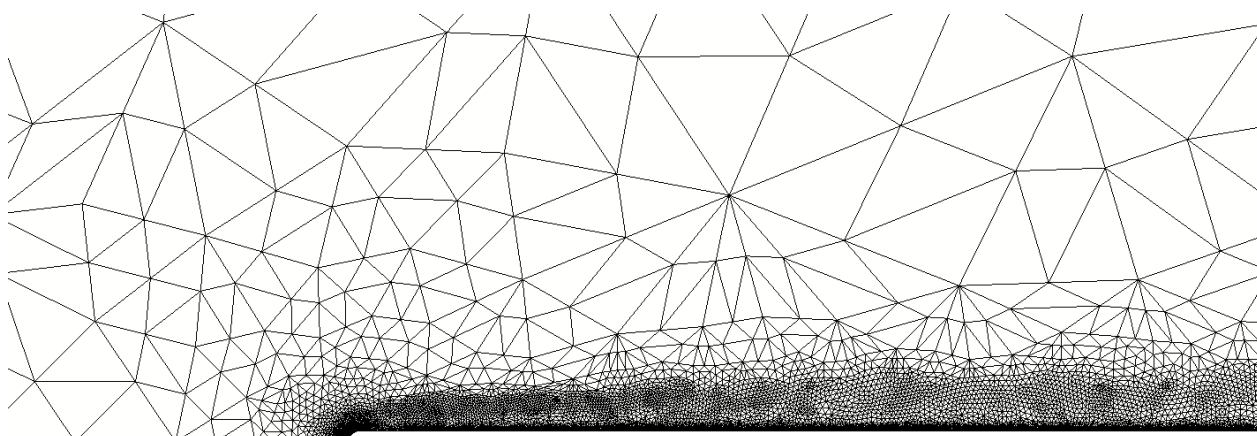


(c) Cycle 5

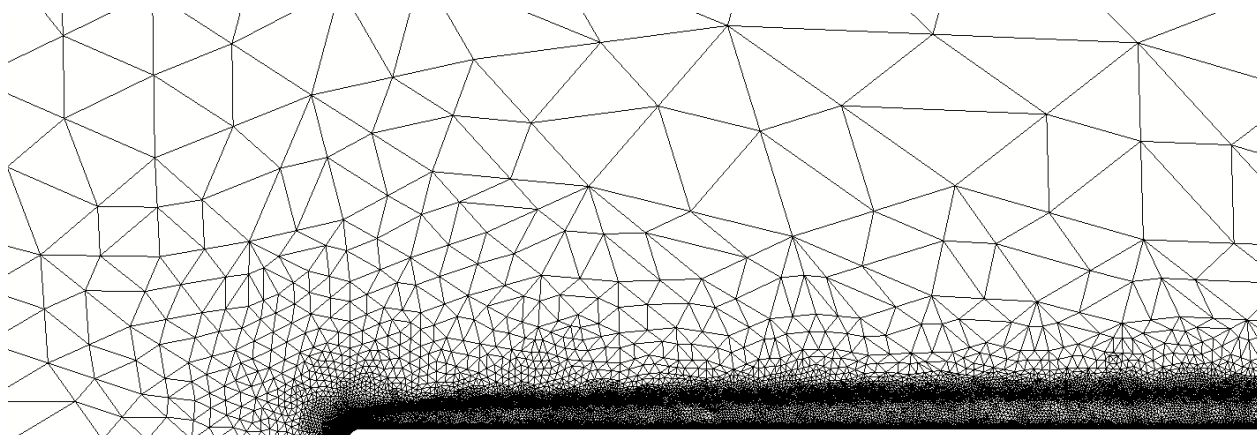
Figure 5.19 Vue d'ensemble des maillages adaptatifs



(a) Cycle 1



(b) Cycle 3



(c) Cycle 5

Figure 5.20 Vue rapprochée des maillages adaptatifs près du bord d'attaque

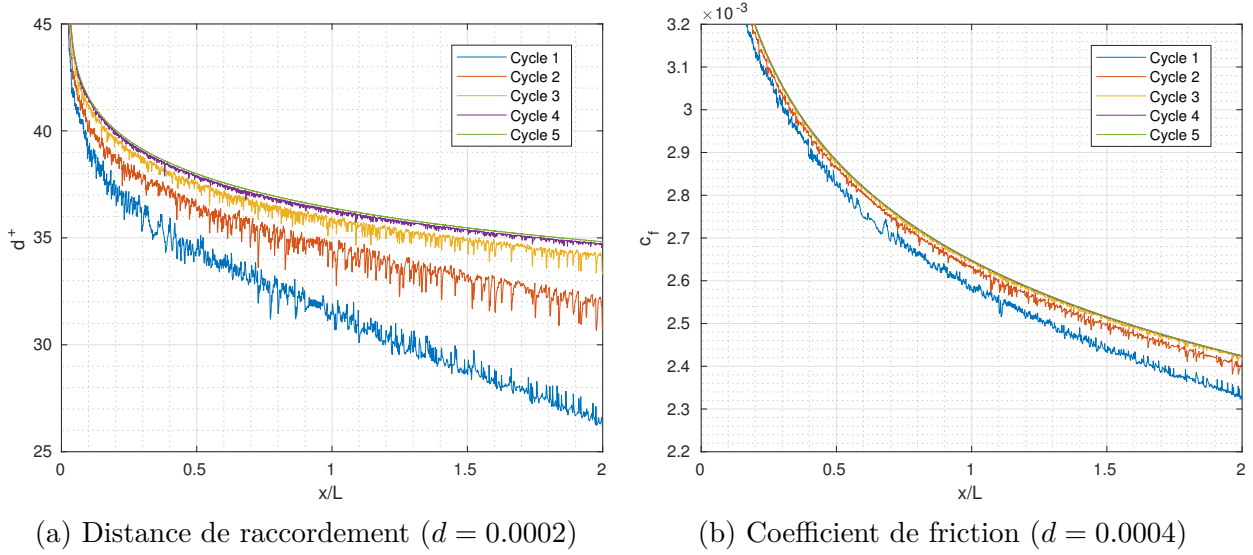


Figure 5.21 Convergence en maillage pour la plaque plane

nombre de Reynolds. À l'inverse, l'accord est moins bon dans la première moitié ($x/L < 1$) à bas nombre de Reynolds. Notons que cette région contient la zone de transition laminaire-turbulente, pour laquelle les corrélations sont invalides. Le meilleur accord est avec la corrélation de Schultz-Grunow à haut nombre de Reynolds. L'accord avec cette courbe est moindre lorsque Re_x diminue, mais notons que la corrélation n'est valide d'après son auteur que dans l'intervalle $10^6 \leq Re_x \leq 10^9$, donc loin du bord d'attaque.

Le tableau 5.10 donne ponctuellement les valeurs de c_f obtenues par simulation et par les corrélations. Comme on s'intéresse aux données dans la zone pleinement turbulente, les points de comparaison sont à la moitié de la plaque et à la limite du domaine. On constate, comme précédemment, que les prédictions sont en bon accord avec la corrélation de Shultz-Grunow à $Re_x = 10^7$ et avec la corrélation de Prandtl à $Re_x = 5 \times 10^6$. Dans les deux cas, l'écart est de moins de 0.3%. En contrepartie, l'écart par rapport à la corrélation de White est de l'ordre de 5% à 7%, ce qui demeure acceptable.

On note également un écart d'une simulation à l'autre, lorsque l'on fait varier la distance de raccordement d , et ce surtout à bas Reynolds, tel que visible à la figure 5.22. Cet écart s'explique par l'hypothèse majeure faite pour obtenir la loi de paroi compatible. Nous avons supposé que l'écoulement en proche paroi peut être modélisé par une couche limite pleinement développée. Or, il est évident que la couche limite n'est pas pleinement développée au bord d'attaque. Également, en imposant d , on impose une épaisseur minimale (d) à la couche limite. On conçoit clairement que près du bord d'attaque, ceci est une source d'erreur. Au fur

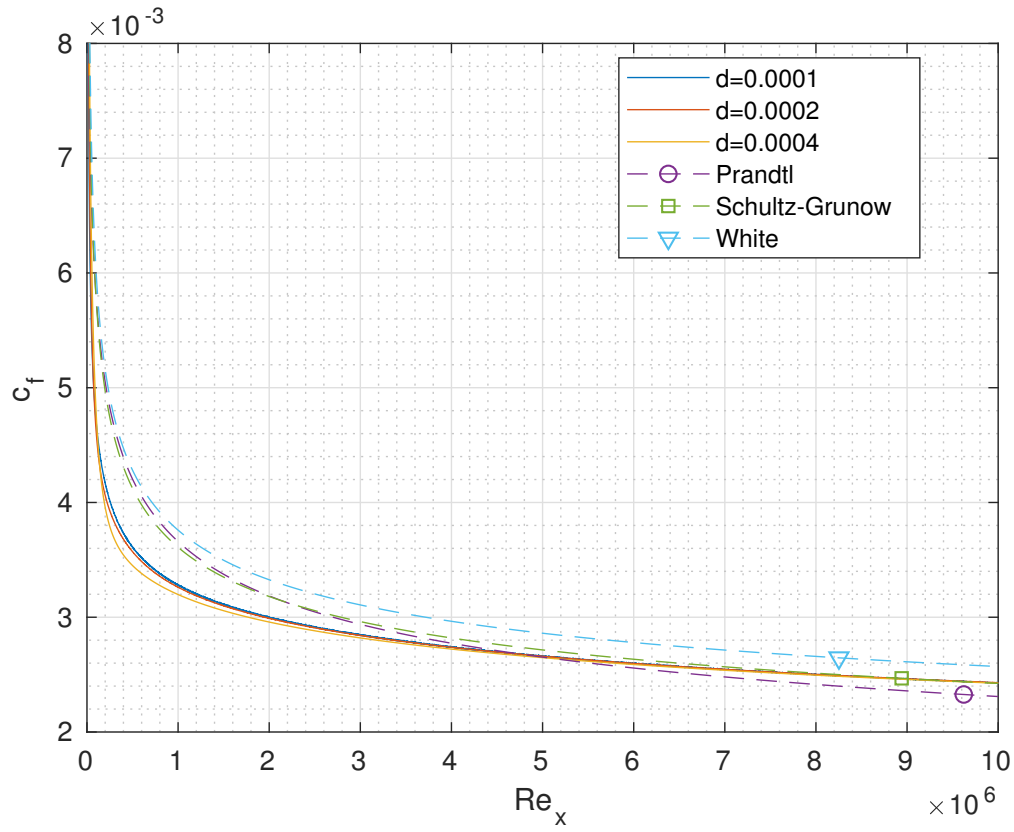


Figure 5.22 Coefficient de friction sur la plaque plane

Tableau 5.10 Coefficient de friction sur la plaque plane

		c_f à $Re_x = 5 \times 10^6$	c_f à $Re_x = 10 \times 10^6$
Simulations	$d = 0.0001$	2.660×10^{-3}	2.421×10^{-3}
	$d = 0.0002$	2.660×10^{-3}	2.427×10^{-3}
	$d = 0.0004$	2.648×10^{-3}	2.422×10^{-3}
Corrélations	Prandtl	2.652×10^{-3}	2.309×10^{-3}
	Schultz-Grunow	2.715×10^{-3}	2.424×10^{-3}
	White	2.861×10^{-3}	2.570×10^{-3}

et à mesure qu'elle se développe, elle s'approche d'une couche limite pleinement développée et l'écart entre les différentes simulations diminue. À la limite du domaine de simulation, on note que la différence sur c_f est de moins de 0.5%. On retrouve donc des résultats presque indépendants par rapport à d tel qu'attendu pour les lois de paroi consistantes.

Ce phénomène est également visible au tableau 5.9. On note qu'en doublant d , la limite inférieure de l'intervalle de d^+ double ($17 \rightarrow 35 \rightarrow 69$). Ceci signifie que le cisaillement prédit au bout de la plaque (là où d^+ est minimal) ne dépend pas de d . En contrepartie, la borne supérieure de d^+ (près du bord d'attaque) ne varie pas proportionnellement à d , indiquant que le cisaillement y diffère d'un calcul à l'autre.

Dans l'ensemble, les prédictions des simulations numériques sont en bon accord avec les corrélations semi-empiriques dans la région pleinement turbulente. Notre approche de loi de paroi compatible ne permet pas d'étendre la validité des lois de paroi aux points de stagnation.

5.2.4 Marche descendante

La marche descendante de Driver [47] est un autre écoulement turbulent couramment utilisé pour la validation des prédictions de modèles de turbulence, car on dispose de données expérimentales détaillées pour ce cas. Bien que le problème soit conceptuellement assez simple, la physique en découlant présente plusieurs caractéristiques intéressantes pour l'étude de la turbulence et plus particulièrement des lois de parois compatibles. On observe notamment des points de stagnation et des zones de recirculation.

Le domaine est modélisé suivant la figure 5.23. Comme pour la plaque plane, les coins de la marche sont modélisés par des arrondis (Γ_4, Γ_6). Ceci facilite la convergence en éliminant une singularité, et a autrement peu d'impact sur l'écoulement. Les conditions limites sont données au tableau 5.11. Notons que le profil de vitesse à l'entrée (Γ_1) est uniforme mais ne vaut pas 1. La valeur est ajustée de sorte à retrouver $u = 1$ au point $(-4H, 5H)$. En effet, on doit laisser le profil de vitesse se développer sur une longueur de $80H$ pour reproduire les conditions expérimentales. Une courte zone de glissement à l'entrée permet d'éviter une incompatibilité des conditions limites à la jonction des frontières. Nous utilisons une loi de paroi compatible à deux échelles de vitesse telle que générée précédemment, sur toutes les parois, en fixant $d = 0.02H$. Sans illustrer, les arrondis Γ_4 et Γ_6 sont de rayon $r = d$.

Comme précédemment, nous comparons nos résultats de simulation aux données expérimentales pour le coefficient de frottement c_f , calculé à l'aide de l'équation (5.3), et au coefficient de pression. On le définit comme l'adimensionnalisation de la pression relative (*gauge*) par

Tableau 5.11 Conditions limites pour le calcul de la marche descendante

Frontière		Conditions limites		
		u	v	k ϵ
Entrée	Γ_1	$u = 0.96$	$v = 0$	$k = 10^{-2}$ $\epsilon = 10^{-3}$
Glissement	Γ_2, Γ_{10}	$(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$	$v = 0$	$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} = 0$ $\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0$
Parois	$\Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_9$	Loi de paroi		
Sortie	Γ_8	$-p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$	$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} = 0$ $\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0$

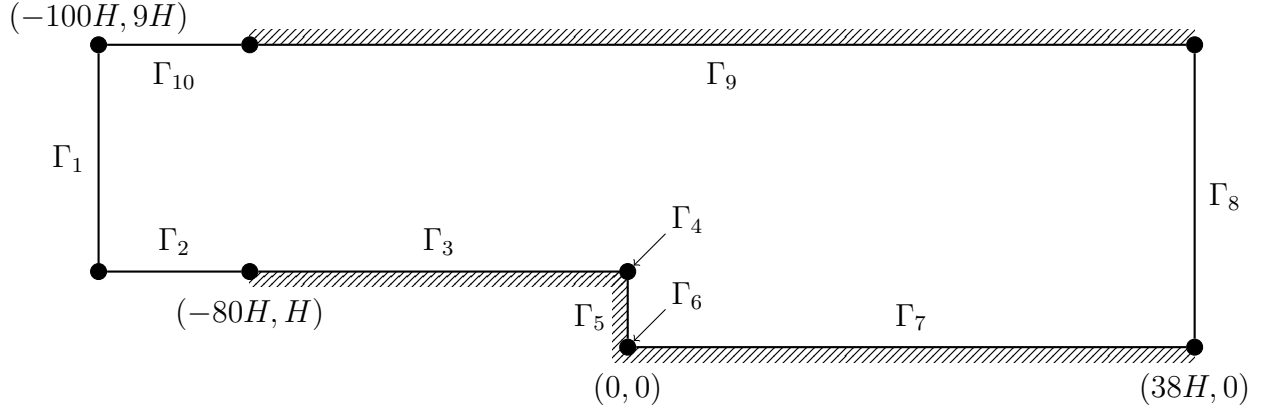


Figure 5.23 Modélisation de la marche descendante (pas à l'échelle)

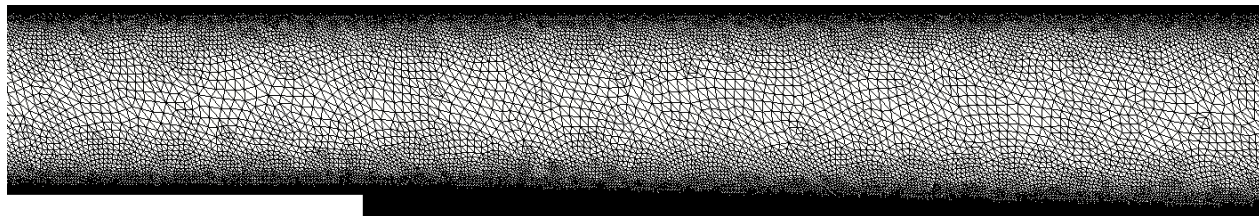
la pression dynamique à l'infini :

$$c_p = \frac{p - p_{\text{ref}}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \quad (5.7)$$

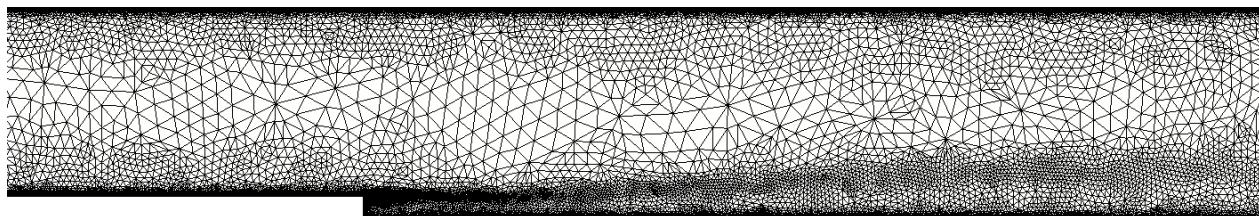
Ici, la pression de référence p_{ref} est la pression à $(x/H = -6.5, y/H = 1)$. Finalement, les auteurs ont mesuré les profils de vitesse à plusieurs stations en amont et en aval de la marche, auxquels nous nous comparerons. D'autres mesures concernent des quantités comme les corrélations de vitesse, qui sont inaccessibles dans le cadre RANS, ainsi on ne s'y compare pas.

On utilise une succession de maillages adaptatifs pour résoudre ce problème. La figure 5.24 illustre les maillages de départ et final, ainsi qu'un maillage intermédiaire, près de la marche. Sur le maillage de départ, nous avons imposé une très petite taille aux éléments près des parois afin de bien représenter les arrondis. Le résultat est que les éléments sont excessivement concentrés là où ce n'est pas nécessaire. Ceci est corroboré par le premier cycle de remaillage adaptatif : on voit que le maillage du cycle 1 déraffine là où les éléments étaient inutilement concentrés. Le résultat est que le nombre de nœuds diminue, ainsi que l'erreur ! Le maillage final met en évidence certaines caractéristiques de l'écoulement, comme pour le cas de la plaque plane. On y voit clairement les couches limites aux parois du haut et du bas, ainsi que l'interface de la couche de mélange.

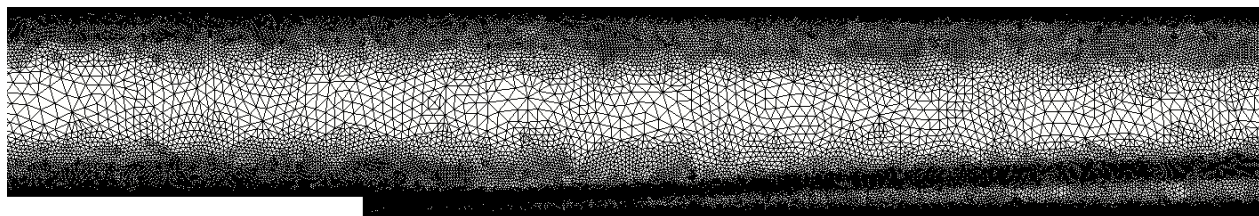
La figure 5.25a illustre la convergence de la prédiction du coefficient de friction avec le raffinement de maillage adaptatif. Comme dans le cas de la plaque plane, on note la présence d'oscillations dans les prédictions de c_f , qui s'amenuisent lorsque l'on raffine le maillage. On considère que le 3^e cycle adaptatif donne une solution convergée en maillage, puisque les oscillations disparaissent pratiquement et que les prédictions de c_f ne diffèrent que peu par rapport au cycle précédent.



(a) Maillage de départ (cycle 0) ≈ 80000 nœuds

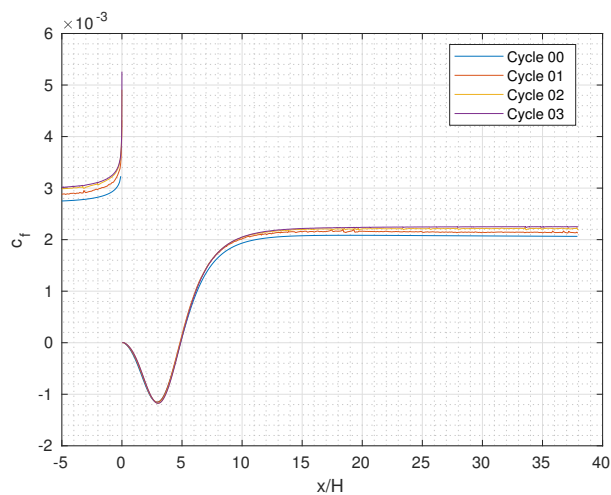


(b) Maillage intermédiaire (cycle 1) ≈ 64000 nœuds

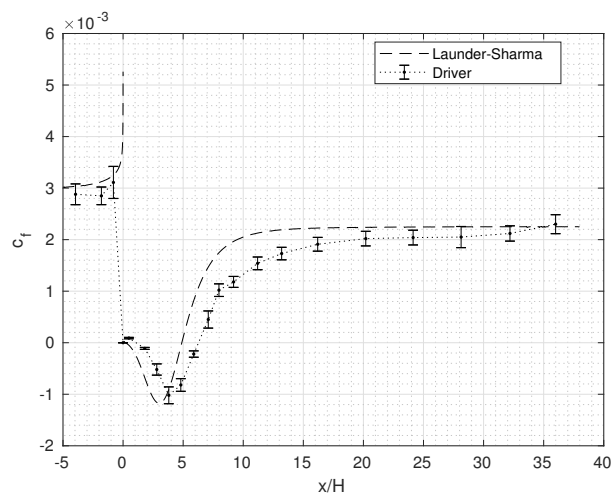


(c) Maillage final (cycle 3) ≈ 330000 nœuds

Figure 5.24 Maillages adaptatifs près de la marche descendante



(a) Convergence en maillage



(b) Comparaison aux données expérimentales sur le dernier maillage

Figure 5.25 Coefficient de friction pour la marche descendante

La figure 5.25b compare les prédictions du coefficient de frottement aux données expérimentales. Dans l'ensemble, les résultats numériques respectent bien la forme que prennent les données expérimentales. L'accord est bon dans deux régions : en amont de la marche et loin en aval ($x/H > 20$). Par contre, les prédictions diffèrent considérablement des données expérimentales dans la zone immédiatement en aval de la marche. Plus particulièrement, la longueur de la zone de recirculation ($c_f = 0$) est sous prédite par environ 20% (Tableau 5.12). Il s'agit d'une faiblesse de la famille des modèles $k-\epsilon$: plusieurs auteurs utilisant des modèles $k-\epsilon$ obtiennent des longueurs de recirculation inférieures à la longueur expérimentale [47, 48, 49, 50]. (D'autres modèles, basés sur $k-\omega$, donnent de meilleures prédictions [48, 50, 51].)

On peut remettre en question la validité des lois de paroi dans la zone de recirculation. Tel que mentionné précédemment, les lois de paroi modélisent une couche limite pleinement développée. De toute évidence, une bulle de recirculation n'est pas bien approximée par une couche limite développée, puisque u est du même ordre de grandeur que v et que le cisaillement passe par 0. Il ne faut donc pas s'étonner que les prédictions dans cette région soient moins bonnes.

Tableau 5.12 Longueur de recirculation

Driver & Seegmiller	Présent résultats	Écart
$6.26 \pm 0.1\%$	4.9	-21.7%

La distance de raccordement de la loi de paroi (Figure 5.26) présente certaines particularités. On constate surtout qu'elle est minimale en aval immédiat de la marche, et maximale au point de rattachement de la bulle de recirculation. Ces deux observations s'expliquent par la physique du problème. Rappelons que pour une loi de paroi compatible à deux échelles de vitesse, d^+ est fixé par le niveau d'énergie cinétique de turbulence. En effet, on note à la figure 5.27 que les courbes de d^+ et k ont la même allure. Le coin inférieur de la marche est une zone où k est minimal, cette région est logée entre deux parois solides et que l'écoulement y est à faible vitesse. Ainsi, on doit s'attendre à ce que d^+ soit petit dans cette région. À l'inverse, le rattachement de la bulle de recirculation primaire engendre un point de stagnation, donc un maximum de k . On explique ce phénomène par la couche de mélange se formant directement en aval de la marche. Ce mélange favorise la production turbulente jusqu'au point de rattachement, après quoi k se diffuse dans la couche limite. Le maximum de k entraîne donc un maximum de d^+ , et sa diffusion se traduit par un d^+ qui tend vers une constante loin en aval de la marche.

Notons également l'intervalle d'application de d^+ , soit entre $d^+ \approx 4$ et $d^+ \approx 42$. La distance de raccordement tend vers 25 en aval éloigné ($x/H > 25$). Ces valeurs excèdent l'intervalle de

validité des lois de paroi standard. Si on suppose que d^+ varie linéairement avec d pour une loi de paroi standard, il faudrait augmenter d par un facteur d'environ 7 pour retrouver $d^+ \approx 30$. La zone de loi de paroi serait alors d'une épaisseur de près de 15% de la hauteur de la marche, ce qui n'est pas du tout négligeable, et est même non-physique !

Le coefficient de pression est tracé à la figure 5.28. On note que les prédictions reproduisent bien la forme prise par les données expérimentales, sauf immédiatement en amont de la marche ($x/H = -0.1$). On note effectivement que c_p décroît significativement en approchant $x/H = 0$ par la gauche. Ceci est une conséquence de l'utilisation d'un arrondi pour modéliser le coin supérieur de la marche. L'arrondi cause une rapide accélération de l'écoulement donc un gradient de pression. Si ce gradient a peu d'impact sur le reste de l'écoulement, on note son impact sur le coefficient de pression. Ainsi, cet écart entre la simulation et l'expérience est mineur. On note aussi en aval de la marche un écart systématique, presque constant, entre les prédictions et les données expérimentales. Cet écart s'explique plutôt par la pression de référence dans la définition (5.7) de c_p . Notons que dans la simulation, le niveau de pression est défini à une constante près ; c'est la condition limite naturelle en sortie qui en fixe le niveau. Ainsi, on doit y soustraire la pression de référence pour calculer c_p . Les données expérimentales ont $c_p = 0$ en deux endroits, chacun pouvant définir p_{ref} : $x/H = -6.5$ et $x/H = 4.5$. Nous avons pris comme pression de référence la valeur en amont. L'autre approche est également valable, dans lequel cas l'accord entre les courbes serait meilleur en aval de la marche mais sacrifié en amont. Ceci témoigne du fait que le modèle prédit mal la *variation* de pression de part et d'autre de la marche.

Les profils de vitesse sont tracés à différentes stations à la figure 5.29. Les stations illustrées sont de $x/H = -4$ à $x/H = 16$. Dans l'ensemble, les prédictions sont très bonnes. Les lois de paroi prédisent très bien la vitesse dès le premier élément, se superposant aux mesures faites les plus proches de la paroi. Les prédictions dans la région de recirculation sont excellentes. Rappelons pourtant que la longueur de recirculation basée sur τ_w que nous obtenons est beaucoup plus petite que celle mesurée. Ceci illustre que le fait d'avoir un bon accord sur les champs de vitesse n'est pas suffisant pour obtenir de bonnes prédictions.

La figure 5.30 montre des lignes de courant près de la marche. On y voit clairement la bulle de recirculation principale, ainsi qu'une plus petite bulle secondaire. Les données expérimentales supportent l'existence d'une seconde bulle, mais Driver *et al.* n'en discutent pas. Les calculs de Lacombe [2] avec le modèle $k-\omega$ SST montrent une troisième bulle de recirculation. Or, sa taille est de l'ordre de $0.07H$, ce qui est comparable à la distance de raccordement et au rayon de l'arrondi de notre modèle. On comprend alors aisément que notre loi de paroi n'arrive pas à capturer cette troisième bulle. Puisque le calcul est difficile à converger, nous

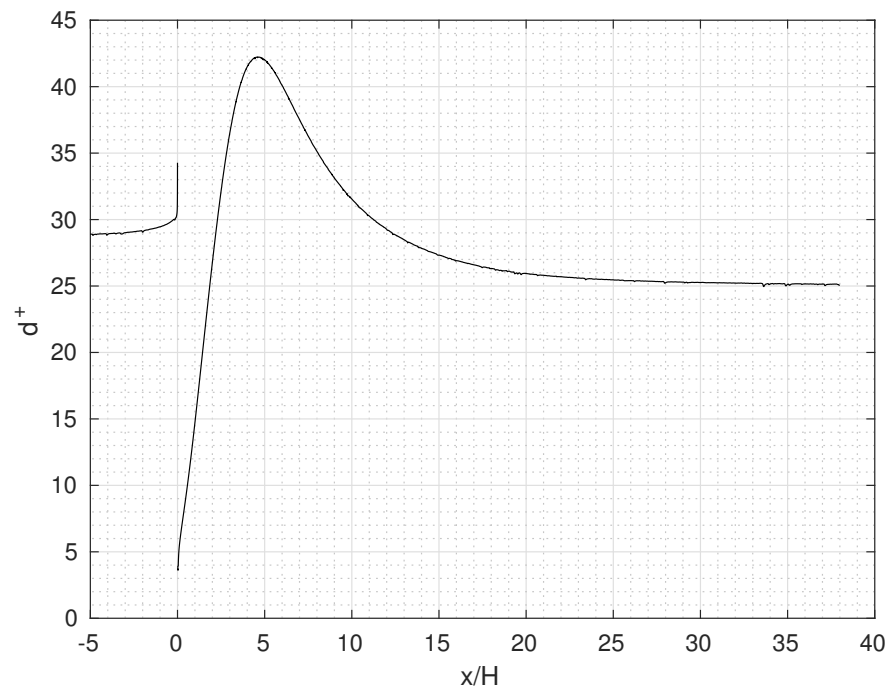


Figure 5.26 Distance de raccordement de la loi de paroi pour la marche descendante

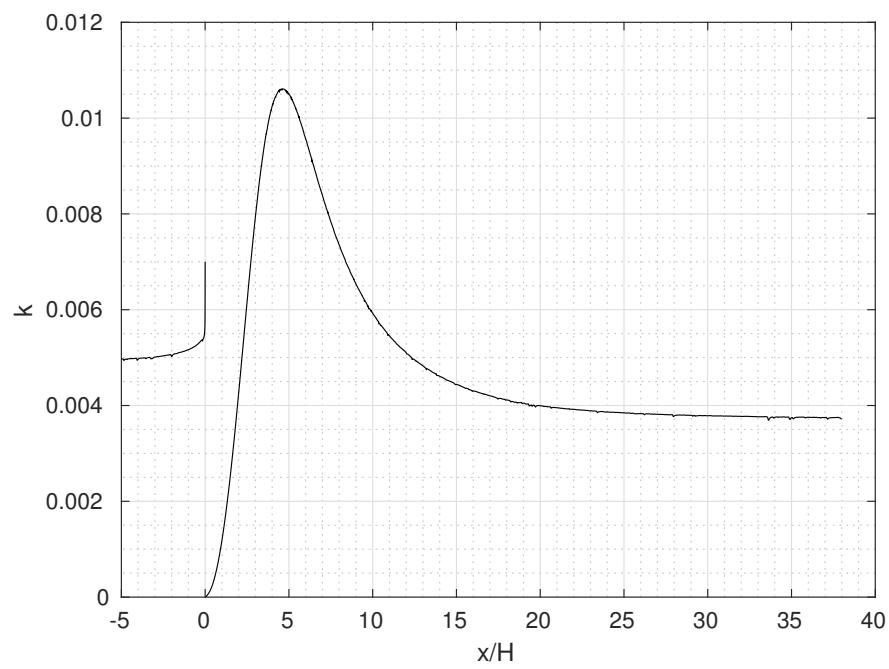


Figure 5.27 Énergie cinétique de turbulence à la paroi le long de la marche

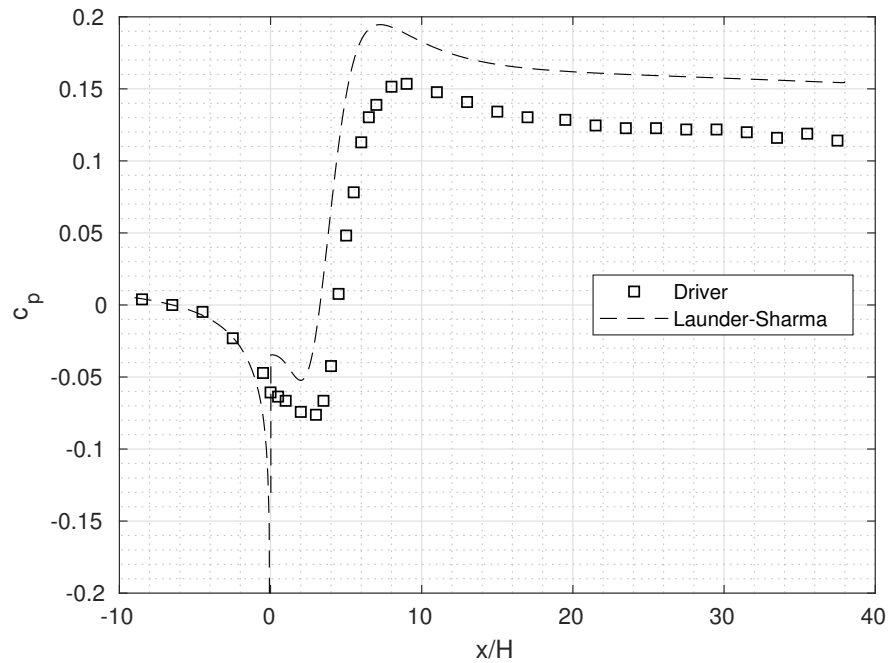


Figure 5.28 Coefficient de pression pour la marche descendante

n'avons pas testé ce cas avec une distance plus petite. Il n'est donc pas certain que le modèle de Launder-Sharma puisse prédire cette bulle.

En résumé, le modèle de Launder-Sharma avec lois de paroi compatibles donne de bonnes prédictions, sauf dans le voisinage immédiat de la marche où la validité des lois de paroi est mise en doute.

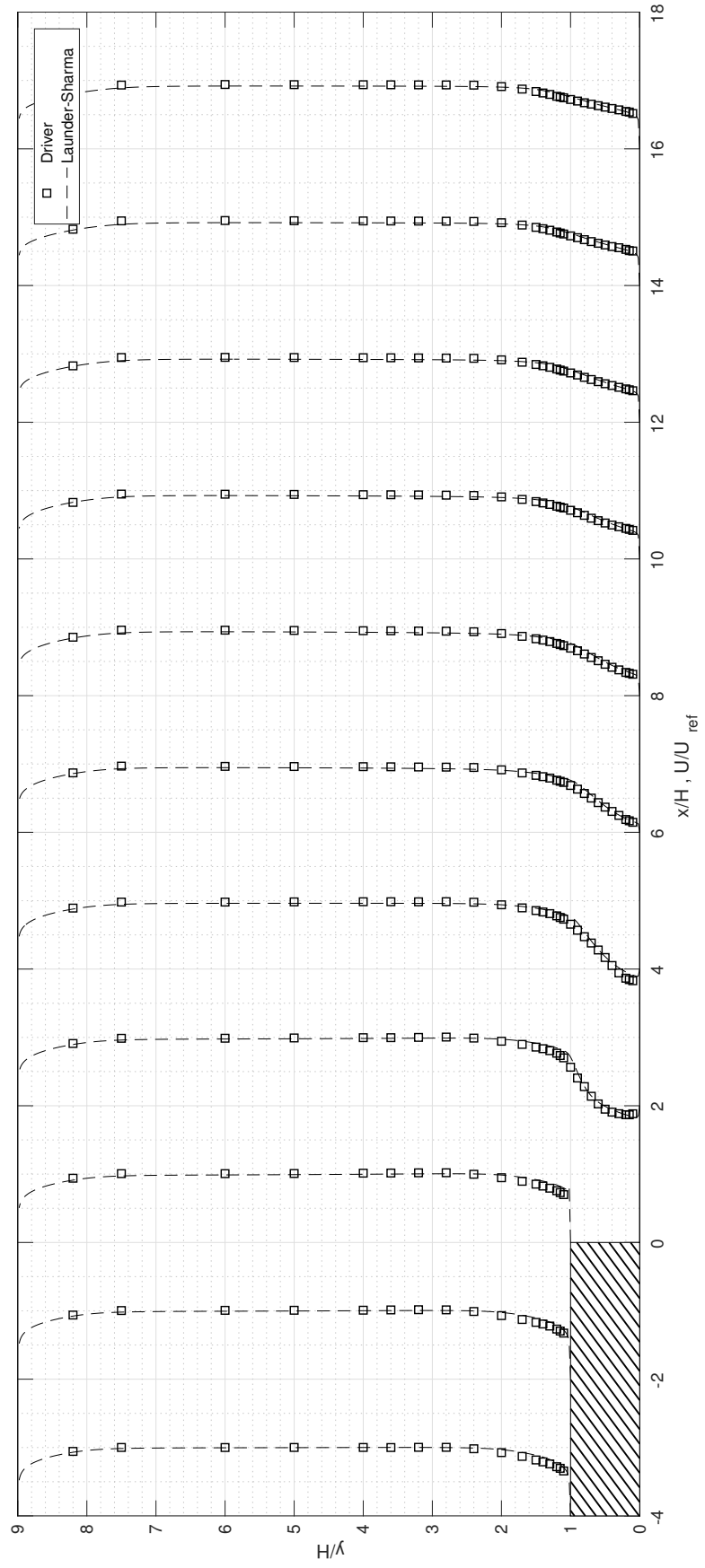


Figure 5.29 Profils de vitesse pour la marche descendante

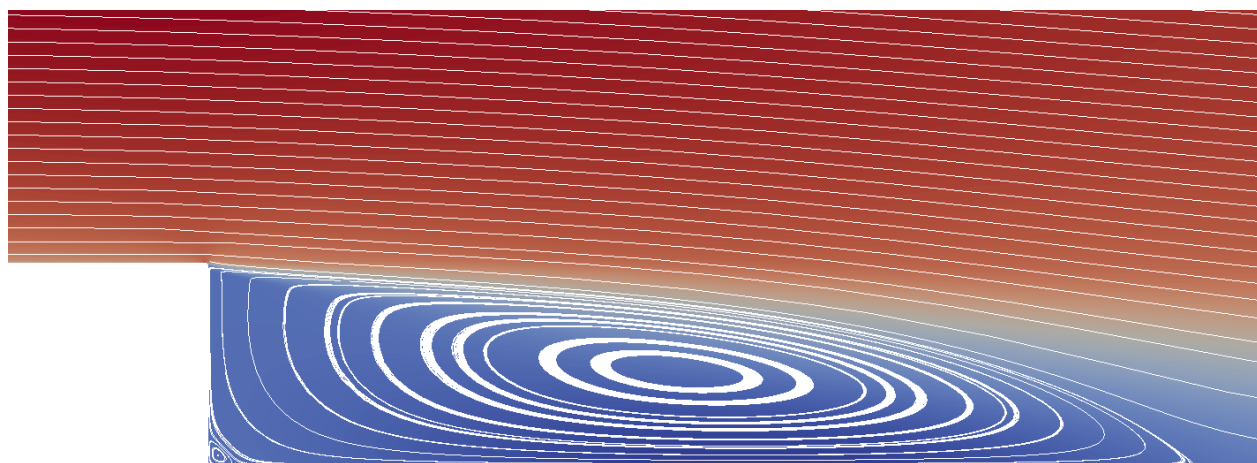


Figure 5.30 Lignes de courant au voisinage de la marche descendante

CHAPITRE 6 CONCLUSION

6.1 Synthèse des travaux

En conclusion, nos travaux de recherche ont permis d'atteindre le but du projet de recherche, qui était de *développer et utiliser des lois de paroi compatibles pour des écoulements turbulents*.

La mise en application des lois de paroi adaptatives et consistantes à des écoulements turbulents complexes a mis en évidence leur capacité à reproduire adéquatement les caractéristiques de l'écoulement. Les résultats indépendants de la distance de raccordement indiquent la consistance des lois de parois tabulées.

Les cas de vérification ont quant à eux montré que l'implémentation des lois de paroi et des équations du modèle est faite correctement dans les deux solveurs éléments finis utilisés. La méthode des solutions manufacturées donne les taux de convergence théoriques (ou mieux) pour la résolution des équations du modèle, et les tests de raccordement à distance variable vérifient la compatibilité de la loi de paroi avec le modèle.

Les lois de paroi compatibles ont été générées avec succès par le solveur 1D en résolvant de manière adaptative un écoulement de Couette turbulent par intégration jusqu'à la paroi du modèle bas-Reynolds de Launder-Sharma. L'algorithme d'adaptation de maillage *a posteriori* nous permet de générer des tableaux de loi de paroi de taille optimale, en équidistribuant l'erreur de la solution sur le maillage. Les solveurs résolvent le modèle de Launder-Sharma en introduisant un relèvement, lequel est nécessaire étant donné le traitement des dérivées secondes dans la méthode des éléments finis.

6.2 Limitations de la solution proposée

L'hypothèse majeure régissant l'utilisation des lois de paroi, *l'existence d'une couche limite*, est parfois trop forte. Nos cas d'application ont montré que les résultats sont indépendants de la distance de raccordement uniquement en présence d'une couche limite suffisamment développée. L'applicabilité des lois de paroi en présence de points de stagnation est remise en question. Une façon de contourner ce problème est de réduire considérablement la distance de raccordement. On se rapproche alors de l'intégration à la paroi, diminuant le recours à l'hypothèse en question. Toutefois, ceci augmente le coût de calcul. On note également que même en intégrant jusqu'à la paroi, certains modèles de turbulence performant mal près des

points de stagnation. L'approche de loi de paroi compatible ne peut pas donner des résultats meilleurs que ceux du modèle duquel les lois sont issues.

Le relèvement introduit une variable supplémentaire au système d'équations à résoudre, ce qui augmente le coût de calcul. On sait que le relèvement augmente considérablement la robustesse et la précision du solveur 1D, mais une telle analyse n'a pas été faite pour **CADYF**. Il n'est pas impossible qu'une implémentation « directe » de la dérivée seconde (donc sans relèvement, en utilisant la deuxième dérivée des fonctions de forme) soit satisfaisante en 2D.

Le relèvement de la vorticité utilise l'hypothèse d'incompressibilité. On ne peut donc pas appliquer directement l'approche proposée dans ce mémoire pour des écoulements compressibles. Il faudrait formuler le Laplacien de \mathbf{u} différemment. Ceci signifie une augmentation du c  t de la méthode de relèvement pour les écoulements compressibles.

Finalement, la méthode des solutions manufacturées nous a permis d'identifier un problème lié à la stabilisation SUPG. On observe effectivement une dégradation de l'ordre de convergence de la norme énergie de l'erreur sur \mathbf{u} . Cette limitation n'est pas propre au modèle de turbulence utilisé, ni aux lois de paroi compatibles. En d'autres mots, elle ne résulte pas des travaux de recherche, mais ceux-ci ont permis de l'identifier.

6.3 Améliorations futures

Une amélioration possible est l'utilisation d'une condition limite de Neumann pour ϵ . En effet, le tableau de loi de paroi compatible admet la possibilité d'imposer $\partial\epsilon/\partial\mathbf{n}$ comme pour k . On peut s'attendre à ce que le modèle converge plus facilement avec une condition de Neumann qu'une condition de Dirichlet.

L'amélioration majeure à apporter aux lois de paroi compatibles est la sensibilisation au gradient de pression. Nous exposons à l'annexe D une approche infructueuse, mais surtout une piste d'amélioration, qui semble répondre aux difficultés rencontrées.

RÉFÉRENCES

- [1] Loïc Frazza. Utilisation conjointe de lois de parois et modèles bas-reynolds. Master's thesis, École Polytechnique de Montréal, 2015.
- [2] Francis Lacombe. Vérification et validation d'une loi de paroi consistante du modèle de turbulence $k\text{-}\omega$ sst. Master's thesis, École Polytechnique de Montréal, 2017.
- [3] Victor Amrom. Lois de paroi pour les écoulements turbulents présentant des gradients de pression adverses. Master's thesis, École Polytechnique de Montréal, 2018.
- [4] David C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc., 1994.
- [5] Farshad Navah, Stephane Etienne, and Dominique Pelletier. Coupled and semi-coupled finite element algorithms for the k-epsilon model of turbulence. *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, Jan 2009.
- [6] André Fortin and André Garon. *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. 2018.
- [7] Alexander N. Brooks and Thomas J.R. Hughes. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32(1-3) :199–259, Sep 1982.
- [8] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7) :1331–1364, May 1992.
- [9] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. part 2 : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7) :1365–1382, May 1992.
- [10] O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu, and J. Wu. Superconvergent patch recovery techniques - some further tests. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(3) :251–258, Mar 1993.
- [11] Anonyme. *Exercise I. to proposition XIX*, volume 4 of *The popular educator*. <https://books.google.com/?id=1TACAAAAQAAJ&pg=PA196>, 1854.
- [12] ProofWiki. Reverse triangle inequality. https://proofwiki.org/wiki/Reverse_Triangle_Inequality, Sep 2018.

- [13] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2) :337–357, Feb 1987.
- [14] Jaime Peraire, Joaquin Peiro, Luca Formaggia, Ken Morgan, and Olgierd C. Zienkiewicz. Finite element euler computations in three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(10) :2135–2159, Oct 88.
- [15] W.P Jones and B.E Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(2) :301–314, Feb 1972.
- [16] B.E. Launder and B.I. Sharma. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 1(2) :131–137, Nov 1974.
- [17] Virendra C. Patel. Turbulence models for near-wall and low reynolds number flows : A review. *AIAA Journal*, 23(9) :1308 – 1319, 1985.
- [18] Kuei-Yuan Chien. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-reynolds-number turbulence model. *AIAA journal*, 20(1) :33–38, 1982.
- [19] CKG Lam and K Bremhorst. A modified form of the k- ϵ model for predicting wall turbulence. *Journal of fluids engineering*, 103(3) :456–460, 1981.
- [20] Laurier Lambert, Dominique Pelletier, and André Garon. Adaptive construction of model-consistent wall functions for two-equation turbulence models with applications. *AIAA Scitech 2020 Forum*, Jan 2020. En soumission.
- [21] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(2) :269 – 289, 1974.
- [22] Loic Frazza, Alexander Hay, and Dominique Pelletier. A logarithmic formulation for low-reynolds number turbulence models with adaptive wall-functions. *22nd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Jun 2015.
- [23] W.S. Kim, S. He, and J.D. Jackson. Assessment by comparison with dns data of turbulence models used in simulations of mixed convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51(5-6) :1293–1312, Mar 2008.
- [24] Masoud Bagheri and K. S. Surana. p-version least-squares finite element formulation for steady-state two-dimensional turbulent flows using the k- ϵ model of turbulence. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 16(2) :97–120, Feb 2000.
- [25] Mikael Mortensen, Hans Petter Langtangen, and Garth N. Wells. A fenics-based programming framework for modeling turbulent flow by the reynolds-averaged navier–stokes equations. *Advances in Water Resources*, 34(9) :1082–1101, Sep 2011.

- [26] Kristian Valen-Sendstad, Mikael Mortensen, Hans Petter Langtangen, Bjørn Reif, and Kent-Andre Mardal. Implementing a k-epsilon turbulence model in the fenics finite element programming environment. Oct 2013.
- [27] Florin Ilinca and Dominique Pelletier. Positivity preservation and adaptive solution of two-equation models of turbulence. *International Journal of Thermal Sciences*, 38(7) :560–571, Jul 1999.
- [28] L. Eça and M. Hoekstra. Near-wall profiles of mean flow and turbulence quantities predicted by eddy-viscosity turbulence models. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2009.
- [29] Bijan Mohammadi and Olivier Pironneau. Unsteady separated turbulent flows computation with wall-laws and k-e model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148(3-4) :393–405, Sep 1997.
- [30] Hamid Reza Nazif and Hassan Basirat Tabrizi. Applying a non-equilibrium wall function in k- ϵ turbulent modelling of hydrodynamic circulating flow. *Applied Mathematical Modelling*, 38(2) :588–598, Jan 2014.
- [31] Tsan-Hsing Shih, Louis A Povinelli, Nan-Suey Liu, Mark G Potapczuk, and JL Lumley. A generalized wall function. 1999.
- [32] Georgi Kalitzin, Gorazd Medic, Gianluca Iaccarino, and Paul Durbin. Near-wall behavior of rans turbulence models and implications for wall functions. *Journal of Computational Physics*, 204(1) :265–291, Mar 2005.
- [33] David Wilcox. Wall matching, a rational alternative to wall functions. *27th Aerospace Sciences Meeting*, Jan 1989.
- [34] David Lacasse, Eric Turgeon, Dominique Pelletier, and Robert Martinuzzi. Prediction of turbulent flow around a square cross-section cylinder in the proximity of a solid wall. *15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Jun 2001.
- [35] J. P. Chabard. Projet n3s de mécanique des fluides – manuel théorique de la version 3. Technical Report HE-41/91.30B, Électricité de France, 12 1991.
- [36] Tobias Knopp, Fabian Spallek, Octavian Frederich, and Gerd Rapin. Investigation of numerical wall functions based on the 1d boundary-layer equations for flows with significant pressure gradient. *Boundary and Interior Layers, Computational and Asymptotic Methods - BAIL 2014*, page 111–120, 2015.
- [37] Tobias Knopp, Thomas Alrutz, and Dieter Schwamborn. A grid and flow adaptive wall-function method for rans turbulence modelling. *Journal of Computational Physics*, 220(1) :19–40, Dec 2006.

- [38] Adam Jones and Sergey Utyuzhnikov. Application of a near-wall domain decomposition method to turbulent flows with heat transfer. *Computers & Fluids*, 119 :87–100, Sep 2015.
- [39] Patrick J. Roache. Code verification by the method of manufactured solutions. *Journal of Fluids Engineering*, 124(1) :4, 2002.
- [40] Myoungkyu Lee and Robert D. Moser. Extreme-scale motions in turbulent plane couette flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 842 :128–145, Mar 2018.
- [41] V. Michelassi, W. Rodi, and J. Zhu. Testing a low-reynolds number k-epsilon turbulence model based on direct simulation data. *AIAA Journal*, 31(9) :1720–1723, Sep 1993.
- [42] L. Eça, M. Hoekstra, A. Hay, and D. Pelletier. A manufactured solution for a two-dimensional steady wall-bounded incompressible turbulent flow. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 21(3-4) :175–188, Mar 2007.
- [43] Christopher Rumsey. 2D zero pressure gradient flat plate validation. https://turbmodels.larc.nasa.gov/flatplate_val.html, 2018.
- [44] David Lacasse, Eric Turgeon, and Dominique Pelletier. On the judicious use of the k- ϵ model, wall functions and adaptivity. *International Journal of Thermal Sciences*, 43(10) :925–938, Oct 2004.
- [45] Frank M. White. *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill, 3 edition, 2005.
- [46] F. Schultz-Grunow. New frictional resistance law for smooth plates. Technical Report NACA-TM-986, National Advisory Committee for Aeronautics, Sep 1941.
- [47] D. M. Driver and H. L. Seegmiller. Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow. *AIAA Journal*, 23(2) :163–171, Feb 1985.
- [48] Jae Yong Kim, Afshin J. Ghajar, Clement Tang, and Gary L. Foutch. Comparison of near-wall treatment methods for high reynolds number backward-facing step flow. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 19(7) :493–500, Oct 2005.
- [49] Alexander Hay and Dominique Pelletier. Code and solution verification of an adaptive finite element turbulent flow solver. *18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Jun 2007.
- [50] F. R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8) :1598–1605, Aug 1994.
- [51] Francis Lacombe, Dominique Pelletier, and Andre Garon. Compatible wall functions and adaptive remeshing for the k-omega sst model. *AIAA Scitech 2019 Forum*, Jan 2019.

- [52] Tobias Knopp. Model-consistent universal wall-functions for rans turbulence modelling. Jan 2006.
- [53] Aleksandar Jemcov, Joseph Maruszewski, Ryan Kelly, and Dipankar Choudhury. A new form of generalized wall functions. *AIAA Scitech 2019 Forum*, Jan 2019.

ANNEXE A FORME FAIBLE DES ÉQUATIONS

A.1 Équations en régime 2D

A.1.1 Continuité

La forme faible de l'équation (2.1a) est :

$$R_p = \int_{\Omega} \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega \quad (\text{A.1})$$

L'équation de continuité n'est pas intégrée par parties. Par conséquent, elle n'introduit pas de condition limite naturelle.

A.1.2 Quantité de mouvement en x

La forme faible de l'équation (2.1b) en x est :

$$\begin{aligned} R_u = & \int_{\Omega} \varphi \left[\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(-p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left((\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} \varphi \left(-p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) n_x d\Gamma - \int_{\Gamma} \varphi \left((\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) n_y d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A.1.3 Quantité de mouvement en y

La forme faible de l'équation (2.1b) en y est :

$$\begin{aligned} R_v = & \int_{\Omega} \varphi \left[\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left((\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(-p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} \varphi \left((\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) n_x d\Gamma - \int_{\Gamma} \varphi \left(-p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_y d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A.1.4 Énergie cinétique de turbulence

La forme faible de l'équation (3.26a) est :

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{K}} = & \int_{\Omega} \varphi \left[\rho \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \varphi \left[-\exp(-\mathcal{K}) P_k + \rho \exp(\mathcal{E} - \mathcal{K}) + \frac{\mu}{2} \left(\left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \right)^2 \right) \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \varphi \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \left(\left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \right)^2 \right) \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} \varphi \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} n_x d\Gamma - \int_{\Gamma} \varphi \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} n_y d\Gamma
\end{aligned} \tag{A.4}$$

A.1.5 Dissipation de l'énergie cinétique de turbulence

La forme faible de l'équation (3.26b) est :

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{E}} = & \int_{\Omega} \varphi \left[\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \varphi \left[-c_1 f_1 \exp(-\mathcal{K}) P_k + c_2 f_2 \rho \exp(\mathcal{E} - \mathcal{K}) \right. \\
& \quad \left. + 2 \exp(-\mathcal{E}) \frac{\mu \mu_t}{\rho} \left(\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right)^2 \right) \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \varphi \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \left(\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \right)^2 \right) \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} \varphi \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} n_x d\Gamma - \int_{\Gamma} \varphi \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} n_y d\Gamma
\end{aligned} \tag{A.5}$$

A.1.6 Relèvement de la vortacité

La forme faible de l'équation (3.26c) est :

$$R_{\omega_z} = \int_{\Omega} \varphi \left[\omega_z - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d\Omega \tag{A.6}$$

Comme l'équation de continuité, celle pour la vortacité n'introduit pas de condition limite naturelle.

A.2 Équations en régime 1D

Tel que mentionné dans le corps de l'ouvrage, les hypothèses appliquées pour un écoulement 1D éliminent certaines équations, en plus de simplifier les autres. Également, une différence d'implémentation entre les solveurs 1D et 2D fait que le relèvement est différent.

A.2.1 Quantité de mouvement en x

La forme faible de l'équation (2.5b) est :

$$R_u = \int \varphi \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} - \int_{\Gamma} \varphi (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{A.7})$$

A.2.2 Énergie cinétique de turbulence

La forme faible de l'équation (3.23a) est :

$$\begin{aligned} R_k = \int \varphi \left[-P_k + \rho \epsilon + \frac{\mu}{2k} \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega \\ + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} - \int_{\Gamma} \varphi \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A.2.3 Dissipation de l'énergie cinétique de turbulence

La forme faible de l'équation (3.23b) est :

$$\begin{aligned} R_{\epsilon} = \int \varphi \left[c_1 f_1 \frac{\epsilon}{k} P_k + c_2 f_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} - \frac{2\mu\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega \\ + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} - \int_{\Gamma} \varphi \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A.2.4 Relèvement de la dérivée de la vitesse

La forme faible de l'équation (3.23c) est :

$$R_w = \int_{\Omega} \varphi \left[\frac{\partial u}{\partial y} - w \right] \quad (\text{A.10})$$

Comme la forme 2D, l'équation de relèvement n'introduit pas de condition limite naturelle.

ANNEXE B ORDRES DE CONVERGENCE DE LA SOLUTION MANUFACTURÉE

On présente ici les taux de convergence obtenus pour la solution manufacturée de la section 5.2.1. On considère les 8 cas correspondant aux combinaisons de :

- Projection de la dérivée ou du flux ;
- Maillage adaptatif ou régulier ;
- Formulation Galerkin ou SUPG.

Comme précédemment, les normes d'erreur sont la norme énergie pour \mathbf{u} , la semi-norme H^1 pour \mathcal{K} , \mathcal{E} et μ_t et la norme L_2 pour p . On s'intéresse surtout à l'ordre de convergence de la norme énergie. Tel que mentionné dans le corps de l'ouvrage, on constate que pour un type de projection et un maillage donnés, la stabilisation SUPG dégrade l'ordre de convergence de la norme énergie.

Tableau B.1 Projection de la dérivée, maillage adaptatif, Galerkin

	\mathbf{u}	\mathcal{K}	\mathcal{E}	p	μ_t
Erreur estimée	1.929	2.462	3.226	2.436	2.313
Erreur exacte	1.906	2.468	3.199	2.547	2.329

Tableau B.2 Projection de la dérivée, maillage adaptatif, SUPG

	\mathbf{u}	\mathcal{K}	\mathcal{E}	p	μ_t
Erreur estimée	1.263	2.041	2.274	2.328	2.022
Erreur exacte	1.269	2.050	2.259	2.369	2.028

Tableau B.3 Projection de la dérivée, maillage régulier, Galerkin

	\mathbf{u}	\mathcal{K}	\mathcal{E}	p	μ_t
Erreur estimée	2.496	2.214	2.627	2.059	2.263
Erreur exacte	2.489	2.219	2.631	2.219	2.276

Tableau B.4 Projection de la dérivée, maillage régulier, SUPG

	\mathbf{u}	\mathcal{K}	\mathcal{E}	p	μ_t
Erreur estimée	1.163	2.068	2.438	2.006	2.024
Erreur exacte	1.198	2.073	2.451	2.015	2.028

Tableau B.5 Projection du flux, maillage adaptatif, Galerkin

	\mathbf{u}	\mathcal{K}	\mathcal{E}	p	μ_t
Erreur estimée	2.034	2.242	2.199	2.436	2.313
Erreur exacte	2.025	2.251	2.210	2.547	2.329

Tableau B.6 Projection du flux, maillage adaptatif, SUPG

	\mathbf{u}	\mathcal{K}	\mathcal{E}	p	μ_t
Erreur estimée	1.689	2.009	2.004	2.328	2.020
Erreur exacte	1.685	2.015	2.018	2.369	2.028

Tableau B.7 Projection du flux, maillage régulier, Galerkin

	\mathbf{u}	\mathcal{K}	\mathcal{E}	p	μ_t
Erreur estimée	2.602	2.210	2.466	2.059	2.265
Erreur exacte	2.579	2.218	2.477	2.219	2.276

Tableau B.8 Projection du flux, maillage régulier, SUPG

	\mathbf{u}	\mathcal{K}	\mathcal{E}	p	μ_t
Erreur estimée	1.693	2.017	2.054	2.006	2.025
Erreur exacte	1.702	2.018	2.053	2.015	2.028

ANNEXE C TABLEAU DE DONNÉES DE LOI DE PAROI COMPATIBLE

Le tableau de données prend le format du tableau C.1. Un exemple simple est présenté au tableau C.2. On y donne à la première ligne le nombre de rangées N , puis à chaque ligne le numéro de la rangée i et les valeurs de y^+ , u^+ , k^+ , ϵ^+ et de la fonction auxiliaire f . Le tableau ne comporte pas d'en-tête, il faut donc en connaître le format pour le lire correctement.

À titre de rappel, l'adimensionnalisation (4.11) est :

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad k^+ = \frac{k}{u_\tau^2} \quad \epsilon^+ = \frac{\epsilon\nu}{u_\tau^4} \quad \omega_z^+ = \frac{\omega_z\nu}{u_\tau^2} \quad (4.11)$$

La fonction auxiliaire f dépend du type de loi de paroi. Elle prend respectivement la forme (4.12) pour la loi de paroi compatible à une échelle de vitesse et la forme (4.14) pour la loi à deux échelles.

Détails d'implémentation

Le format ici illustré sert surtout à expliquer l'utilisation des lois de paroi tabulées. L'implémentation des solveurs ne respecte pas exactement le format du tableau C.1.

La principale différence est que le solveur 2D ne lit pas f dans le tableau mais calcule sa valeur directement. Un avantage de cette approche est que le contenu du tableau tel que stocké sur le disque ne dépend pas du nombre d'échelles de vitesse ; on peut changer le nombre d'échelles dans la définition du problème sans avoir à changer de tableau. Le solveur **CADYF** calcule aussi d'autres quantités comme $\partial k^+ / \partial y^+$ qui sont stockées en mémoire mais pas dans le fichier du tableau sur le disque. Également, le solveur attend sous certaines conditions une colonne supplémentaire pour T^+ pour les lois de paroi thermiques. On se référera aux travaux de Lacombe à ce sujet [2].

Le solveur 1D a été prévu pour la sensibilisation au gradient de pression, tel que discuté à l'annexe D. La principale conséquence est que **CL1D** lit le tableau sous le format D.1. Notons toutefois qu'en l'absence de gradient de pression, on retombe sur le format C.1, avec quelques informations supplémentaires. En écriture, **CL1D** peut produire les tableaux de données sous les deux formats, afin d'assurer la compatibilité avec **CADYF**. Les résultats présentés dans ce mémoire utilisent effectivement le format du tableau C.1.

Tableau C.1 Format du tableau de données

N					
i	y^+	u^+	k^+	ϵ^+	f
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tableau C.2 Exemple de tableau de données

26					
1	0.00E+0	0.00E+0	0.00E+0	0.00E-0	0.00E+0
2	3.79E+0	3.52E+0	1.39E+0	1.18E-1	1.33E+1
3	8.40E+0	6.22E+0	2.83E+0	1.91E-1	5.23E+1
4	1.40E+1	7.94E+0	3.27E+0	1.55E-1	1.11E+2
5	2.08E+1	9.15E+0	3.37E+0	1.12E-1	1.90E+2
6	2.91E+1	1.00E+1	3.37E+0	8.13E-2	2.93E+2
7	3.91E+1	1.08E+1	3.36E+0	6.04E-2	4.25E+2
8	5.13E+1	1.15E+1	3.34E+0	4.59E-2	5.92E+2
9	6.60E+1	1.21E+1	3.33E+0	3.55E-2	8.02E+2
10	8.37E+1	1.27E+1	3.32E+0	2.79E-2	1.06E+3
11	1.05E+2	1.32E+1	3.31E+0	2.22E-2	1.39E+3
12	1.30E+2	1.37E+1	3.31E+0	1.78E-2	1.80E+3
13	1.61E+2	1.42E+1	3.31E+0	1.45E-2	2.30E+3
14	1.97E+2	1.47E+1	3.31E+0	1.18E-2	2.91E+3
15	2.40E+2	1.52E+1	3.31E+0	9.78E-3	3.65E+3
16	2.90E+2	1.56E+1	3.31E+0	8.13E-3	4.55E+3
17	3.48E+2	1.61E+1	3.31E+0	6.83E-3	5.61E+3
18	4.16E+2	1.65E+1	3.31E+0	5.80E-3	6.88E+3
19	4.93E+2	1.69E+1	3.32E+0	4.98E-3	8.36E+3
20	5.79E+2	1.73E+1	3.32E+0	4.34E-3	1.00E+4
21	6.76E+2	1.77E+1	3.32E+0	3.84E-3	1.20E+4
22	7.82E+2	1.81E+1	3.32E+0	3.46E-3	1.42E+4
23	8.96E+2	1.85E+1	3.32E+0	3.18E-3	1.66E+4
24	1.01E+3	1.89E+1	3.32E+0	2.99E-3	1.92E+4
25	1.14E+3	1.92E+1	3.32E+0	2.88E-3	2.20E+4
26	1.27E+3	1.96E+1	3.32E+0	2.85E-3	2.49E+4

ANNEXE D LOI DE LA PAROI GÉNÉRALISÉE AVEC GRADIENT DE PRESSION

Cette annexe est un complément au mémoire traitant de la sensibilisation au gradient de pression des lois de paroi compatibles. On décrit ci-dessous deux approches. La première approche est infructueuse et est basée sur un paramètre de gradient de pression adimensionnel. La seconde n'a pas été testée et repose sur une échelle de vitesse basée sur le gradient de pression.

Cette annexe sert notamment à documenter le code CL1D développé durant cette maîtrise, qui utilise la première approche.

D.1 Approche basée sur le paramètre de pression p^+

Le paramètre p^+ est une adimensionnalisation du gradient de pression. Comme pour toutes les variables « $+$ », on adimensionnalise par le cisaillement pariétal :

$$p^+ = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\nu}{\rho u_\tau^3} \quad (\text{D.1})$$

Ce paramètre est utilisé par plusieurs auteurs traitant de la modélisation des parois en présence d'un gradient de pression [4, 33, 52, 53].

Afin de comprendre le comportement de ce paramètre, illustrons-le à l'aide d'un exemple. La figure D.1 illustre le profil de vitesse pour un écoulement de Couette avec différents gradients de pression. En augmentant le gradient de pression, la vitesse près de la paroi du bas ($y = 0$) diminue. En augmentant davantage, l'écoulement est localement renversé, le gradient de pression devient alors favorable.

Il faut comprendre qu'il existe un *gradient de pression critique* tel que le cisaillement τ_w est nul. Par conséquent, on retrouve d'après la définition (D.1) que $p^+ = \infty$. Il en est de même pour toute quantité divisée par u_τ : $u^+ \rightarrow \infty$, $k^+ \rightarrow \infty^2$, $\epsilon^+ \rightarrow \infty^4$... Par conséquent, *une approche basée sur p^+ est uniquement valide pour de faibles gradients de pression* ; si le gradient de pression devient trop important, l'adimensionnalisation par u_τ (4.11, D.1) perd son sens.

Ce comportement est également visible à la figure D.2. On voit que le gradient de pression agit premièrement dans la zone logarithmique, puis, en augmentant le gradient de pression, l'effet s'étend à la sous-couche visqueuse. À un moment donné, il y a inversion et les profils de u^+

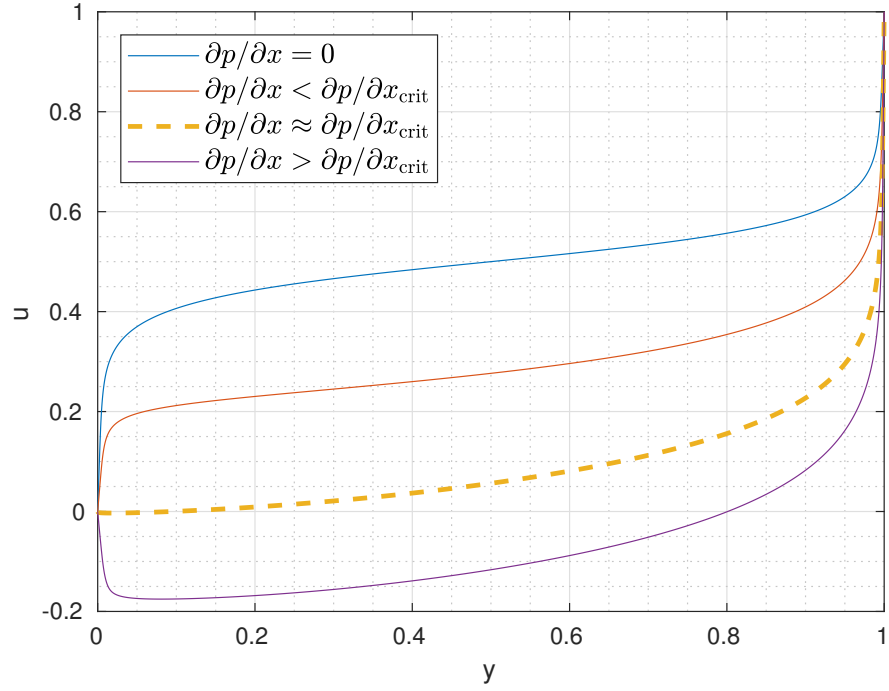


Figure D.1 Profil de vitesse d'écoulements de Couette avec gradient de pression

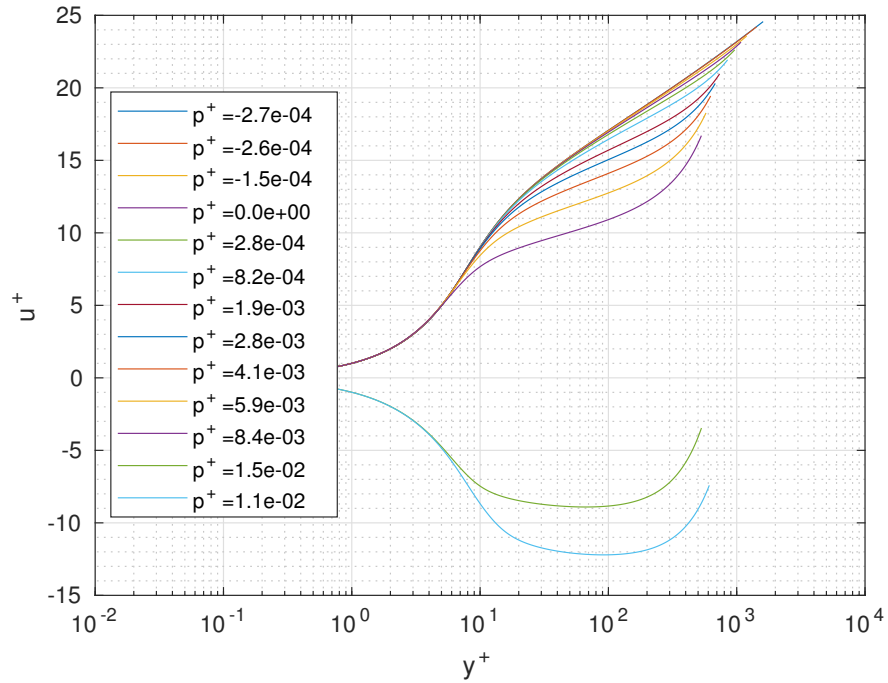


Figure D.2 Profils adimensionnels de vitesse d'écoulements de Couette avec gradients de pression

sont représentés comme négatifs. Malheureusement, le modèle diverge lorsqu'on approche le gradient de pression critique, ainsi on ne peut pas illustrer le profil $u^+(y^+, p^+ = p_{\text{crit}})$.

Si les gradients de pression adverses font tendre p^+ vers l'infini, les gradients favorables ont également un effet pervers. En effet, imaginons un écoulement de Poiseuille. Plus le gradient de pression est favorable, plus il tend à accélérer l'écoulement donc à augmenter le cisaillement à la paroi. Comme on le voit à l'équation (D.1), deux phénomènes s'opposent : dp/dx augmente et $1/u_\tau$ diminue. Ceci converge à une valeur limite [31]. Ainsi, la plage de p^+ que l'on arrive à couvrir est limitée du côté des gradients favorables en raison de cet effet. Un autre effet pervers est qu'au delà du gradient de pression critique, le gradient devient favorable, ainsi augmenter $\partial p/\partial x$ fait diminuer p^+ . On voit cela à la légende de la figure D.2, où p^+ augmente continuellement, jusqu'à atteindre l'inversion ; puis diminue sur les deux derniers profils. Il s'agit en somme d'un paramètre adimensionnel très problématique.

D.1.1 Implémentation dans CL1D

D.1.1.1 Génération du tableau

On génère le tableau de données en résolvant successivement des écoulements de Couette turbulents en variant l'amplitude du gradient de pression.

Pour faciliter la convergence de tous les calculs, on utilise la solution du cas précédent comme solution initiale. Chaque cas est résolu en adaptant le maillage. Tous les cas utilisent le même maillage de départ.

Le format du tableau est détaillé à la section D.1.1.3. Brièvement, on comprend que le tableau est l'expression discrète (tabulée) de la figure D.2 (sauf pour les profils inversés).

D.1.1.2 Détermination des paramètres

Pour déterminer y^+ et p^+ , on adopte le même principe que pour la loi de paroi compatible sans gradient de pression, soit de définir une fonction auxiliaire pouvant être évaluée à partir de la solution dimensionnelle connue, qui nous permet de déterminer les paramètres adimensionnels de la loi de paroi. La nouvelle fonction est

$$g(y^+, p^+) = p^+ y^{+3} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\rho y^3}{\mu^2} \quad (\text{D.2})$$

Dans le cas sans gradient de pression, on inversait f (dont l'expression dépend du nombre d'échelles de vitesse) dans le tableau de la loi de paroi pour obtenir y^+ . Ici, le principe est

similaire, mais on inverse un système d'équations pour trouver simultanément les valeurs de y^+ et p^+ . Par exemple, pour une loi de paroi à une échelle de vitesse, on a

$$\begin{cases} f(y^+, p^+) = \frac{uy}{\nu} & \text{(D.3a)} \\ g(y^+, p^+) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\rho y^3}{\mu^2} & \text{(D.3b)} \end{cases}$$

On résout ce système non-linéaire par la méthode de Newton, telle que présentée à la section 2.2.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y^+} & \frac{\partial f}{\partial p^+} \\ \frac{\partial g}{\partial y^+} & \frac{\partial g}{\partial p^+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y^+ \\ \delta p^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_f \\ R_g \end{bmatrix} \quad \text{(D.4)}$$

La solution donne (y^+, p^+) . Connaissant ces paramètres, on détermine l'échelle de vitesse comme pour la loi de paroi compatible sans gradient de pression :

$$u_\tau = \frac{d^+ \nu}{d} \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

On doit ensuite interpoler les valeurs de k^+ et ϵ^+ dans le tableau.

Interpolation La procédure d'interpolation dans le tableau est simple. On identifie premièrement les deux valeurs tabulées de p^+ les plus proches de notre valeur calculée. Pour chacune de ces valeurs, on interpole linéairement en y^+ . On interpole ensuite linéairement entre ces deux valeurs. Bref, on interpole en y^+ puis en p^+ . Cette procédure nous donne les valeurs évaluées dans le tableau : k_{tab}^+ , ϵ_{tab}^+ .

Lors de la résolution du système non-linéaire (D.3), on peut se retrouver à évaluer des valeurs situées en dehors de la plage tabulée. On doit donc permettre d'interpoler à l'extérieur du tableau, c'est-à-dire d'extrapoler.

Conditions limites Les conditions limites sont appliquées comme pour la loi de paroi compatible sans gradient de pression :

$$\tau_w = -\rho u_\tau \frac{u}{u^+} \quad \text{(D.5)}$$

$$k = u_\tau^2 k_{\text{tab}}^+ \quad \text{(D.6)}$$

$$\epsilon = \frac{u_\tau^4}{\nu} \epsilon_{\text{tab}}^+ \quad \text{(D.7)}$$

Notons que seule la loi de paroi à une échelle de vitesse a été testée.

D.1.1.3 Format du tableau de données

Les variables adimensionnelles sont à présent des fonctions de deux variables :

$$u^+ = u^+(y^+, p^+)$$

Par conséquent, le tableau de données doit comporter une dimension supplémentaire.

L'idée est de construire un tableau à trois entrées : y^+ , p^+ , et la variable ($u^+ \dots$). Une autre façon d'illustrer est d'imaginer un ensemble de « pages » ou de sous-tableaux, où chaque page est un tableau C.1. On illustre ce concept à la figure D.3, où on le représente comme un vecteur de tableaux C.1. Notons qu'en raison de l'adaptation de maillage, chaque sous-tableau est de taille différente.

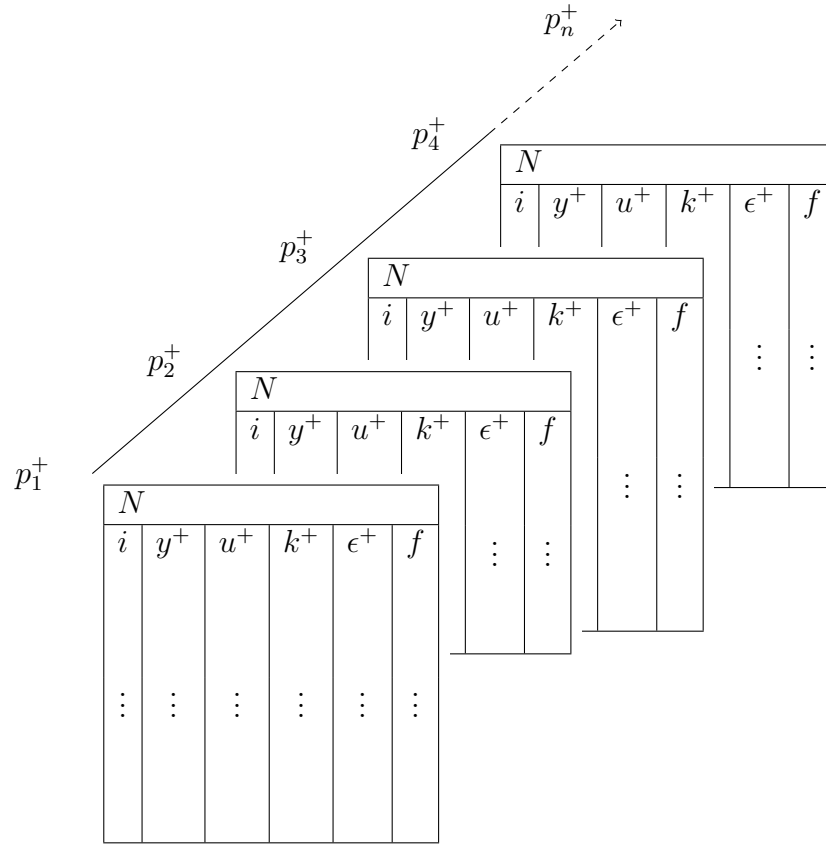


Figure D.3 Vecteur de tableaux de loi de paroi

On doit d'ailleurs ajouter de l'information supplémentaire qui donne le nombre de pages, ainsi que la valeur de p^+ associée à chaque page. En pratique, le tableau est représenté en format texte, ainsi chaque « page » s'ajoute en fait l'une sous l'autre. Le format résultant est celui du tableau D.1. Il est expliqué ci-dessous.

La première ligne du tableau est l'en-tête global. Il donne le nombre de sous-tableaux (pages), le nombre de variables dépendantes (u^+ , k^+ , ϵ^+ , w^+), et l'intervalle de p^+ couvert par les pages. Ensuite, chaque sous-tableau a son en-tête, qui donne le numéro du sous-tableau, la valeur de p^+ , le nombre de points dans ce tableau, et l'intervalle de y^+ couvert par cette page. On y retrouve ensuite les indices de rangée et les valeurs des variables, des fonctions auxiliaires et de la matrice jacobienne. Les sous-tableaux s'enchaînent un à la suite de l'autre.

Tableau D.1 Format du tableau de données

N_{tab}		N_{var}		p_{min}^+		p_{max}^+					
j_{tab}		p^+		N_{node}		y_{min}^+		y_{max}^+			
i	y^+	u^+	k^+	ϵ^+	w^+	f	g	$\frac{\partial f}{\partial y^+}$	$\frac{\partial g}{\partial y^+}$	$\frac{\partial f}{\partial p^+}$	$\frac{\partial g}{\partial p^+}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

j_{tab}		p^+		N_{node}		y_{min}^+		y_{max}^+			
i	y^+	u^+	k^+	ϵ^+	w^+	f	g	$\frac{\partial f}{\partial y^+}$	$\frac{\partial g}{\partial y^+}$	$\frac{\partial f}{\partial p^+}$	$\frac{\partial g}{\partial p^+}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

\vdots											
----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

D.1.2 Application à un écoulement de Poiseuille

Une loi de paroi compatible sensibilisée au gradient de pression est générée dans CL1D puis appliquée à un écoulement de Poiseuille dans un test de raccordement. On s'attend aux mêmes conclusions que pour le test de raccordement de la section 5.1.3, soit que les solutions se superposent indépendamment de la distance de raccordement.

Cependant, on obtient la figure D.4. Comme on peut le constater, les profils de vitesse varient significativement en changeant d , ce qui est aberrant ! Ceci est surtout visible lorsque d est grand, mais est également vrai lorsque d est petit.

À titre d'explication, l'inspection des conditions limites a montré que la résolution du système (D.3) donnait des valeurs de p^+ différentes lorsque l'on varie d , ce qui est aberrant puisque le gradient de pression (dimensionnel) est maintenu constant.

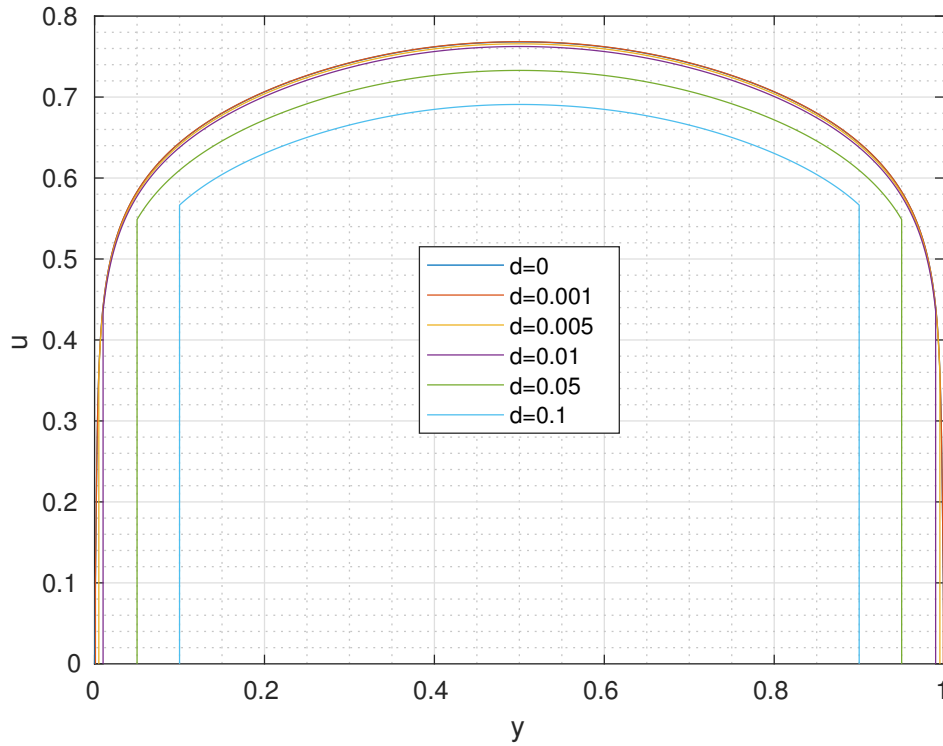


Figure D.4 Profil de vitesse d'un écoulement de Poiseuille en variant la distance de raccordement (les lignes verticales indiquent la distance de raccordement)

Une hypothèse est que le système non-linéaire (D.3) pourrait admettre plusieurs solutions. Une autre hypothèse est que la plage tabulée de p^+ est trop limitée, et qu'on introduit de l'erreur en interpolant à l'extérieur du tableau.

Conclusion

En somme, l'approche basée sur p^+ ne respecte pas le principe de consistance de la loi de paroi, puisqu'elle donne des solutions différentes au même problème dépendamment de la distance de raccordement. Elle est également difficile à traiter numériquement, demandant la résolution d'un système non-linéaire à chaque point où l'on impose la loi de paroi. Surtout, elle n'est pas applicable pour de forts gradients de pression adverses, puisque l'on se met à diviser par 0 pour adimensionnaliser les variables.

D.2 Approche proposée

Nous proposons donc une nouvelle méthode, qui n'est pas basée sur p^+ mais sur une nouvelle échelle de vitesse.

D.2.1 Loi de la paroi généralisée

Tel que mentionné à la section 4.1.2, on peut introduire des effets supplémentaires à la loi de la paroi, dont les effets de gradient de pression. La présente approche est fondée sur la loi de la paroi généralisée de Shih *et al.* [31], qui introduisent une échelle de vitesse basée sur la pression :

$$u_p = \left(\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \frac{\nu}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{D.8})$$

On peut alors définir une *échelle combinée* :

$$u_c = u_\tau + u_p \quad (\text{D.9})$$

L'échelle u_c présente un avantage majeur, qui est qu'elle ne s'annule jamais. En effet, on peut annuler u_p en annulant le gradient de pression, mais on a alors un cisaillement non-nul. À l'opposé, on peut annuler le cisaillement en imposant le gradient de pression critique, mais on retrouve $u_p \neq 0$. On élimine donc le problème de division par 0 qu'on avait dans l'autre approche.

Ensuite, on peut redéfinir y^+ . En effet, on peut adimensionnaliser y par chaque échelle de vitesse

$$\begin{aligned} y^+ &= \frac{y u_c}{\nu} \\ y_p^+ &= \frac{y u_p}{\nu} \\ y_\tau^+ &= \frac{y u_\tau}{\nu} \end{aligned}$$

Ceci permet de décomposer la loi de la paroi en deux contributions indépendantes, l'une en y_τ^+ et l'autre en y_p^+ . Cette distinction est cruciale dans l'approche de Shih *et al.* qui procèdent par décomposition pour obtenir une expression analytique de la loi de la paroi. Cependant, dans l'approche de loi de paroi compatible, on n'aura qu'à résoudre un écoulement de Couette avec gradient de pression pour obtenir la tabulation du profil $u^+(y^+)$.

D.2.2 Loi de paroi compatible

Comme dans l'approche basée sur p^+ , on résout un écoulement de Couette avec gradient de pression. Le résultat est un profil de solution $u(y, \partial p / \partial x)$ qui doit être adimensionnalisé. La différence est qu'on obtient pas un profil adimensionnel de forme $u^+(y^+, p^+)$. Ici, le choix des variables indépendantes n'est pas encore certain. On propose $u^+(y_c^+, \frac{u_p}{u_c})$, ce qui est conforme à ce que font Shih *et al.*, mais un autre choix pourrait être par exemple $u^+(y_\tau^+, y_p^+)$. Notre choix semble plus approprié pour la représentation sous forme de tableau 2D.

La tabulation se ferait sous un format similaire au tableau D.1, mais où chaque page correspond à un ratio $\frac{u_p}{u_c}$ différent, plutôt qu'une valeur de p^+ .

Les conditions limites sont toujours les mêmes, mais exprimées en terme de u_c , sauf pour le cisaillement, qui demeure exprimé en $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$ pour rester cohérent. Pour obtenir la forme de condition limite de Robin pour τ_w , il faut toutefois réécrire u_τ en termes des autres vitesses.

$$\tau_w = -\rho u_\tau \frac{u - u_p u^+}{u^+} \quad (\text{D.10})$$

$$k = u_c^2 k_{\text{tab}}^+ \quad (\text{D.11})$$

$$\epsilon = \frac{u_c^4}{\nu} \epsilon_{\text{tab}}^+ \quad (\text{D.12})$$

À ce stade-ci, il n'est pas clair comment l'on pourra déterminer y^+ et $\frac{u_p}{u_c}$. Il semble que l'on devra résoudre un système non-linéaire comme dans l'autre approche, mais nous n'avons pas déterminé quelles seraient les fonctions auxiliaires.

D.3 Conclusion

L'approche proposée basée sur u_p répond directement à l'une des faiblesses de la méthode basée sur p^+ , soit son inapplicabilité pour de grands gradients de pression. Par contre, elle présente encore certaines difficultés : on anticipe toujours avoir à résoudre un système non-linéaire ; de surcroît on ne connaît pas encore les fonctions de ce système. Or, comme l'approche précédente s'est montrée incohérente, il nous faut en explorer d'autres, ce qui justifie d'investiguer la présente plus en profondeur.